Systematische Begründung der Lieschen Abbildung der komplexen Ebene und Ableitung der Geraden-Kugeltransformation aus der komplexen Geometrie.

INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung

der

Doktorwürde

genehmigt

von der philosophischen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich Wilhelms-Universität zu Bonn.

Von

WILHELM BRACH

aus Bonn.

BONN 1937

Buchdruckerei Kubens, Inhaber H. Schnitzler, Maxstr. 75

Berichterstatter: Prof. Dr. E. A. Weiss
Mitberichterstatter: Prof. Dr. H. Beck

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung 5

Erſtes Kapitel: Syſtematiſche Begründung der Lieſchen Abbildung der komplexen Ebene.

§ 1. Die Grundlagen der Lieſchen Abbildung . . 8

1. S. Lies „Repräſentation". 2. Die Segreſche Abbildung. 3. Herleitung der Lieſchen Abbildung aus der Segreſchen.

§ 2. Der komplexe Kegelſchnitt 14

4. Bild einer Kurve zweiter Ordnung im Segreſchen R_4. Die Bildfläche Γ. 5. Das Polarſyſtem der Fläche Γ als Bild des Polarſyſtems des Kegelſchnitts C. 6. Die reellen Tangentialebenen von Γ — Bilder der Geraden der zugehörigen Kurve 2. Klaſſe. 7. Bild eines Kegelſchnitts im Lieſchen Bild-R_3. 8. Pol und Polare im Lieſchen R_3.

§ 3. Die Ketten der komplexen Ebene 25

9. Die binäre Punktkette. 10. Die binäre Geradenkette. 11. Zweidimenſionale Ketten: Bild einer ternären Punkt- und Geradenkette im Segreſchen Bild-R_4. 12. Bild einer ternären Punkt- und Geradenkette im Lieſchen-R_3. 13. Bilder dreidimenſionaler Punkt- und Geradenketten im Segreſchen-R_4 und im Lieſchen Bild-R_3.

§ 4. Ketten auf Kegelſchnitten 38

14. Bilder von Punktketten auf Kurven 2. O. im Segreſchen-R_4 und im Lieſchen Bild-R_3. 15. Bilder von Geradenketten auf Kurven 2. Klaſſe im Segreſchen Bild-R_4 und im Lieſchen Bild-R_3.

Zweites Kapitel: Ableitung der Geradenkugeltransformation aus der Komplexen Geometrie.

§ 5. Begründung der Geradenkugeltransformation aus der Geometrie der komplexen Ebene 43

16. Die Euklidiſche Geradenkugeltransformation. 17. Bild von Punkt- und Geradenhyperkegelſchnitt im Segreſchen-R_4. 18. Die Nichteuklidiſche Geradenkugeltransformation. 19. Zuſammenhang zwiſchen den beiden verſchiedenen Arten der Begründung der Geradenkugeltransformation.

§ 6. Konſtruktion der Nichteuklidiſchen Geradenkugeltransformation 50

20. Konſtruktion der Abbildung: Punkte eines R_3 — Geraden der M_3^2. 21. Die durch die Projektion der M_3^2 hervorgerufene Einzweideutigkeit der Verwandtſchaft. 22. Konſtruktion der Nichteuklidiſchen Geradenkugeltransformation.

EINLEITUNG.

Im Jahre 1869 veröffentlichte S. Lie[1]) in seiner Erstlingsarbeit[2]) eine Abbildung der Punkte der komplexen Ebene auf die reellen Massenpunkte eines R_3. Diese Abbildung kam für Lie dadurch zu großer Bedeutung, daß sie zum Ausgangspunkte für die Entdeckung der Geradenkugeltransformation[3]) wurde. Zur Weiterentwicklung der Theorie hat aber die Abbildung nichts beigetragen. Hierzu war erstens der benutzte analytische Apparat nicht ausreichend, und zweitens waren Lie die Grundlagen der komplexen Geometrie noch unbekannt, die erst in den Jahren 1885, 1890 von C. Juel[4]) und hauptsächlich (1889—91) von C. Segre[5]) entwickelt wurden. So kam es, daß die Liesche Abbildung und mit ihr die auf sie begründete Ableitung der Geradenkugeltransformation in Vergessenheit geriet, zumal auch Lie selbst in seinen späteren Arbeiten[6]) nicht mehr an sie anknüpfte.

---

[1] Wir zitieren die „Gesammelten Abhandlungen", herausgegeben von F. Engel und P. Heegaard, Leipzig, Teubner und Oslo, Aschehoug, Bd. 1, 1934, Bd. 2 I, 1935.

[2] S. Lie, Repräsentation der Imaginären der Plangeometrie, in Ges. Abh. Bd. 1, Abh. I.

[3] S. Lie, Sur une transformation géométrique, Comptes Rendus 71 (1870) S. 579—583 = Ges. Abh. Bd. 1, Abh. VIII S. 88—92.

[4] C. Juel, Bidrag til den imaginäre Linies og den imaginäre Plans Geometri, Diss. Kjobenhavn 1885, und Über einige Grundgebilde der projektiven Geometrie, Acta math. 14 (1890) S. 1.

[5] C. Segre, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Torino Atti 25 (1889—90) S. 276, 430, 592; 26 (1890—91) S. 35.

[6] S. Lie, Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anw. auf die Theorie part. Diff.-gl., Math. Ann. 5 (1872) = Ges. Abh. Bd. 2 I, Abh. I.

An die Stelle der Lie ſchen Repräſentation trat die C. Segre ſche[7]) Abbildung der Punkte der komplexen Ebene auf den reellen Zug einer M_4^6 im R_8 und den aus ihr durch ſtereographiſche Projektion entſtehenden und zur Gaußſchen Ebene analogen reellen R_4, der beſonders in der neueren Zeit durch ſeine Anwendung in der Funktionentheorie von zwei komplexen Variabeln allgemein bekannt wurde.

Unter den Begründungen der Geraden-Kugeltransformation gewann aber diejenige den Vorzug, die auf der Klein ſchen Abbildung des Geradenkontinuums auf die Plücker ſche M_4^2 des R_5 beruht, und die hauptſächlich durch die Arbeiten von E. Study ſynthetiſch und analytiſch ihre vollkommene und endgültige Ausgeſtaltung fand. Dieſe Methode der Ableitung bot zudem den Vorteil, gleichzeitig Euklidiſche und Nichteuklidiſche Geraden-Kugeltransformation zu umfaſſen, während Lies erſte Begründung nur die Ableitung der Euklidiſchen Geraden-Kugeltransformation zuläßt. Lie hatte ſogar — wahrſcheinlich aus dieſem Grunde — zunächſt die Möglichkeit einer Nichteuklidiſchen Geraden-Kugeltransformation — Abbildung der Punkte eines Raumes auf den Tangentenkomplex einer Fläche 2. O. eines zweiten Raumes überſehen.[8])

In der vorliegenden Arbeit wird nun im erſten Kapitel die Lieſche Abbildung aus der Segreſchen abgeleitet, und zwar, nachdem die Grundlage analytiſch gegeben iſt, nach rein ſynthetiſchen Methoden. Nacheinander werden die Bilder der komplexen Kegelſchnitte, der binären und ternären Ketten (die bei Lie implizite vorkommen, ohne daß Lie ihre Bedeutung als Grundelemente

---

[7] C. Segre, Rappresentazioni reali delle forme complesse, Math. Ann. 40 (1891) S. 413; vgl. auch B. Segre, Sobre algunas representaciones reales del plano complejo, Revista Mat. Hispano-Americana, 1928; desgl. auch E. Study, Das Imaginäre in der ebenen Geometrie, 2. Teil, herausgeg. von E. A. Weiß, Bonn 1933 und 1934; und F. Baños, Estudio ſintético de los espacios complejos de n dimensiones, Publ. del Lab. y Sem. Mat. II, Madrid, 1917.

[8] S. Lie in Geſ. Abh. 1, Nr. XI, S. 106, Z. 17. Dieſe Möglichkeit wurde zuerſt von F. Schur eingeſehen, vgl. Nachruf von F. Engel auf F. Schur in Jhrbr. der D. M. V., 45 (1935) S. 1. — Daß es tatſächlich unmöglich iſt, auf dem von Lie angegebenen Wege die N.-E.-G.-K.-T. zu erhalten, zeigen wir auf S. 44.

der komplexen Ebene erkannt hätte), insbesondere der binären Ketten auf Kegelschnitten behandelt.[9])

Das zweite Kapitel behandelt die Herleitung der Geraden-Kugeltransformation aus der komplexen Geometrie. Die Transformation wird im euklidischen Falle aus zwei im reellen Bild-R_4 geeignet gewählten R_3 von der Bildverwandtschaft einer Korrelation der komplexen Ebene ausgeschnitten.[10]) Diesen beiden R_3 entsprechen in der komplexen Ebene zwei als Örter komplexer Punkte dreidimensionale binäre Geradenketten. Eine solche Geradenkette kann als Ausartung eines Punkthyperkegelschnitts aufgefaßt werden.

Unsere Untersuchung zeigt nun, wie man auch die Nichteuklidische Geraden-Kugeltransformation als Bild einer Korrelation der komplexen Ebene erhalten kann, wenn man von einem regulären Punkthyperkegelschnitt ausgeht. Es ergibt sich auf diesem Wege u. a. eine synthetische Konstruktion der bekannten Abbildung der Geraden eines linearen Komplexes auf die Punkte einer M_3^2 im R_4 und vor allem eine neue (zu der bekannten Konstruktion der Euklidischen Geraden-Kugeltransformation[11]) analoge) Konstruktion der Nichteuklidischen Geraden-Kugeltransformation[12]) und schließlich der Zusammenhang zwischen den beiden bisher völlig getrennt voneinander behandelten Begründungen der Geraden-Kugeltransformation in der Liniengeometrie und der Geometrie der komplexen Ebene.

---

[9] In den Lieschen Abhandlungen werden die Resultate meist ohne Beweise angegeben. Die Beweise sind von F. Engel in den „Anmerkungen" zu den Ges. Abh. analytisch nachgetragen worden. Dieselbe Aufgabe hatte sich L. Monville (Dissertation Gießen, 1922) gestellt.

[10] E. A. Weiss, S. Lies erste Begründung der Geraden-Kugeltransformation, Math. Ann. 108, (1933), S. 621.

[11] Vgl. R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung I, Leipzig 1892, S. 257, und die auf S. 51 angegebene Literatur. Ferner H. Liebmann, Sitzungsberichte Bayr. Akad. Wiss., Math.-phys. Klasse, 1915, S. 189.

[12] Wegen der Ableitung der Konstruktion der Euklidischen Geraden-Kugeltransformation aus der komplexen Geometrie vgl. W. Brach, Zur Liebmannschen Konstruktion der G.-K.-T., Jahresber. der D. M. V., 44 (1934).

BEGRÜNDUNG DER LIESCHEN ABBILDUNG.

§ 1. Die Grundlagen der Lieſchen Abbildung.

1. S. Lies „Repräſentation“. Sind:

$$X = x + iy,\ Y = z + ip$$

die inhomogenen Koordinaten eines Punktes der komplexen Ebene, ſo deutet Lie die reellen Zahlen x, y, z als rechtwinklige[13]) Koordinaten eines Punktes in einem Raume R_3, p als deſſen Gewicht. Eine komplexe Gerade wird dann im allgemeinen durch eine „kotierte“ Ebene dargeſtellt; die Punkte gleichen Gewichtes liegen auf Geraden größter Neigung der Ebene. Die Linien, die von Punkten gleichen Gewichtes erfüllt werden, nennt Lie „Streifen“. Der Ort der Punkte mit dem Gewichte Null heißt „Nullſtreifen“. Jede Gerade allgemeiner Lage des Bild-R_3 kann als Nullſtreifen einer und nur einer Ebene angeſehen werden und ſomit als Repräſentant der komplexen Geraden dienen.

Zu einer zweiten, von der erſten nicht weſentlich verſchiedenen reellen Darſtellung der komplexen Ebene gelangt Lie[14]), indem er nicht von den Punkten, ſondern von den Geraden der komplexen Ebene ausgeht. Er ordnet jeder der ∞^4 komplexen Geraden allgemeiner Lage eine der ∞^4 räumlichen Geraden zu durch die Vorſchrift, daß er einer komplexen Geraden

$$BZ = X - A^{15}) \quad (B = b_1 + ib_2,\ A = a_1 + ia_2)$$

diejenige Raumgerade entſprechen läßt, deren inhomogene Plückerſche Strahlenkoordinaten

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$$

ſind. Dieſe Bildgerade fällt mit dem Nullſtreifen der erſten Repräſentation zuſammen.

Für die reellen Parallelen zur X-Achſe tritt hier eine Beſonderheit auf: als ihre Bilder erſcheinen die Horizontalebenen des Bild-R_3; während die

---

[13]) Die (x, y)-Ebene ſei horizontal, die z-Achſe vertikal.
[14]) Geſ. Abh. 1, Nr. III, S. 26.
[15]) Wir ſchließen uns der Lieſchen Bezeichnungsweiſe an.

imaginären Parallelen zur X-Achſe nur durch die uneigentliche Gerade der Horizontalebenen (deren Punkte kein beſtimmtes Gewicht tragen) repräſentiert werden.

Die zweite Abbildung werden wir zum Ausgangspunkt unſerer Unterſuchung machen.

Lie gibt[16]) ſchließlich noch eine dritte Repräſentation an. Er geht wiederum von den Geraden der komplexen Ebene aus: Einer Geraden, deren Gleichung er in der Form:

$$TX + VZ = 1 \quad (T = t + iu,\ V = v + iw)$$

ſchreibt, bildet er ab durch die Ebene

$$tx + uy + vz - 1 = 0$$

vom Gewichte w.

Den Zuſammenhang zwiſchen der dritten und der erſten Repräſentation hat Fr. Engel[17]) hergeſtellt.

2. **Die Segreſche Abbildung.** C. Segre[18]) bildet den eigentlichen Punkt X, Z

$$X = x + iy,\ Z = z + ip$$

auf den reellen eigentlichen Punkt des R_4 mit den Koordinaten

$$x,\ y,\ z,\ p$$

ab. Als Bilder der eigentlichen Geraden der komplexen Ebene erhält man dann ∞^4 ausgezeichnete reelle Ebenen des R_4 (Charakteriſtiſche Ebenen, bei Study[19]) Synektiſche Ebenen), die die Gaußſchen Bilder der abgebildeten komplexen Geraden ſind, ſoweit eigentliche Punkte der komplexen Geraden und der Bildebene in Frage kommen. Jede charakteriſtiſche Ebene trifft den uneigentlichen R_3 des R_4 in einer reellen Geraden, die als das Bild des uneigentlichen Punktes der komplexen Geraden angeſehen werden muß. Durch eine ſolche reelle un-

---

[16] Geſ. Abh. 1, Nr. III, S. 30.

[17] Anmerkungen zu den Geſ. Abh. 1, S. 570.

[18] Siehe S. 6 Anm. 7; ebenſo auch C. Segre, Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi, Palermo Rendiconti 5 (1891), S. 192.

[19] Siehe S. 6, Anm. 7.

eigentliche Gerade laufen jedesmal ∞^2 charakteriſtiſche Ebenen. Wir erhalten ∞^2 derartig ausgezeichnete reelle uneigentliche Geraden, die einer elliptiſchen Geradenkongruenz angehören. Es ſind die Bilder der ∞^2 uneigentlichen Punkte der komplexen Ebene.

Die eben erwähnte elliptiſche Geradenkongruenz nennen wir im folgenden „absolute Kongruenz“; ihre beiden konjugiert-komplexen Leitgeraden ſeien mit $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ bezeichnet. Die reellen Geraden der abſoluten Kongruenz — die Bildgeraden der uneigentlichen Punkte der komplexen Ebene — nennen wir „absolute Geraden“. Eine charakteriſtiſche Ebene — Bild einer komplexen Geraden — ſchneidet die Leitgeraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ der abſoluten Kongruenz in den konjugiert-komplexen „absoluten Punkten“ J und $\overline{\mathrm{J}}$ der Ebene.

Man kann nun nach Study[20]) genau ſo, wie man die Gaußſche Ebene durch einen uneigentlichen Punkt abſchließt, auch die Geſamtheit der uneigentlichen Punkte einer charakteriſtiſchen Ebene als deren uneigentlichen Punkt bezeichnen. Aus dem Raume R_4 entſteht dann ein Raum $\mathfrak{R}_4$, der nur durch ∞^2 uneigentliche Punkte abgeſchloſſen iſt. Dem Inbegriff dieſer ∞^2 uneigentlichen Punkte kann dann noch der Name: uneigentliche charakteriſtiſche Ebene beigelegt werden. Dann entſpricht jedem Punkte der komplexen Ebene ausnahmslos eindeutig ein Punkt im Raume $\mathfrak{R}_4$ und ebenſo jeder Geraden der komplexen Ebene eine charakteriſtiſche Ebene. Wir werden von dieſer Bezeichnungsweiſe Gebrauch machen, um Sätze des Raumes $\mathfrak{R}_4$ einfacher ausſprechen zu können.

Für die bis hierher nur analytiſch begründete Abbildung läßt ſich eine einfache geometriſche Konſtruktion[21]) angeben. Wir denken uns dabei den Raum R_4, ſo wie wir es ſchon oben gelegentlich der Einführung der Geraden $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ getan haben, durch Hinzufügung imaginärer Punkte zu einem nun achtdimenſionalen Punktkontinuum erweitert. In dieſem komplexen R_4 denken wir uns die (vierdimenſionale) reelle Ebene $\mathfrak{E}$ gelegen, deren Punkte auf die reellen Punkte des R_4 abgebildet werden ſollen.

Im uneigentlichen R_3 des R_4 nehmen wir eine hochimaginäre Gerade $\mathfrak{G}$ an (d. i. eine Gerade, die zu ihrer konjugiert-komplexen Geraden $\overline{\mathfrak{G}}$ windſchief iſt), die die Ebene $\mathfrak{E}$ nicht ſchneidet. Wir verbinden nun den abzubildenden Punkt P der Ebene $\mathfrak{E}$ durch eine Ebene mit der Geraden $\mathfrak{G}$.

[20]) Siehe S. 6, Anm. 7.
[21]) Siehe S. 6, Anm. 7.

Die zur Ebene P$\mathfrak{G}$ konjugiert-komplexe Ebene durch $\overline{\mathfrak{G}}$ trifft die Ebene P$\mathfrak{G}$ in ihrem reellen Punkte. Als Bild eines Punktes P ſoll im allgemeinen dieſer reelle Punkt dienen.

Singularitäten ergeben ſich für die Punkte der uneigentlichen Geraden der komplexen Ebene $\mathfrak{E}$. Die Verbindungsebene eines ſolchen Punktes mit $\mathfrak{G}$ und die zu ihr konjugiert-komplexe Ebene durch $\overline{\mathfrak{G}}$ ſchneiden ſich in einer reellen Treffgeraden der von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ aufgeſpannten (elliptiſchen) Kongruenz, alſo — unter Benutzung der oben eingeführten Terminologie — in einer abſoluten Geraden der abſoluten Kongruenz.

Einer eigentlichen Geraden der komplexen Ebene entſpricht in dieſer Abbildung eine Ebene, die Schnittebene ihres Verbindungs-R_3 mit $\mathfrak{G}$ und des dazu konjugiert-komplexen R_3 (durch $\overline{\mathfrak{G}}$), alſo eine charakteriſtiſche Ebene des Bild-R_4. Der uneigentlichen Geraden der komplexen Ebene iſt der Inbegriff der abſoluten Geraden des uneigentlichen R_3 des Bild-R_4 zugeordnet.

3. **Herleitung der Lieſchen Abbildung aus der Segreſchen.** Wir ſtellen jetzt den Zuſammenhang zwiſchen der Segreſchen und der zweiten Lieſchen Abbildung her. Dies geſchieht dadurch, daß im Segreſchen Bild-R_4 (x, y, z, p) der Raum

$$p = 0$$

als Lieſcher Bild-R_3 ausgezeichnet wird. Die zweite [22]) Lieſche Abbildung erhält man dann, indem man die Bildfiguren der Segreſchen Abbildung mit dem Lieſchen R_3 zum Schritt bringt. Dieſes Verfahren werden wir jetzt, ohne die analytiſche Begründung weiter zu benutzen, rein ſynthetiſch zur Anwendung bringen. Wir denken uns den Segreſchen R_4 nach der in der vorigen Nummer auseinandergeſetzten Methode konſtruiert. Der Lieſche Bild-Raum iſt ein beliebiger reeller eigentlicher Raum dieſes R_4, der die Ebene $\mathfrak{E}$ enthält. Er hat — wie jeder eigentliche reelle R_3 des R_4 — mit der abſoluten Kongruenz eine abſolute Gerade $\mathfrak{P}$, die Verbindungslinie der Punkte J, $\overline{\text{J}}$, in denen $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ den R_3 ſchneiden, gemein. Die durch die abſolute Gerade $\mathfrak{P}$ laufenden reellen Ebenen des Lieſchen-

---

[22]) Die erſte Lieſche Abbildung der Nr. 1 ergibt ſich als kotierte Projektion des Segreſchen R_4 von dem uneigentlichen Punkte der p-Achſe aus; die dritte als kotierter Schnitt aus der zur Segreſchen Abbildung dualen Abbildung.

R_3 ſind ſomit charakteriſtiſche Ebenen, und zwar ſind es die einzigen charakteriſtiſchen Ebenen des Lieſchen R_3. Wir wollen ſie Horizontalebenen nennen.

Die Gerade $\mathfrak{P}$ ſchneidet die Ebene $\mathfrak{E}$ in einem Punkte, den wir (wieder um mit der Lieſchen Bezeichnung im Einklang zu bleiben) als uneigentlichen Punkt der X-Achſe der Ebene $\mathfrak{E}$ bezeichnen. Dann folgt erſtens, daß die abſolute Gerade $\mathfrak{P}$ des Lieſchen-R_3 Bild des uneigentlichen Punktes des X-Achſe iſt, zweitens, daß die Horizontalebenen Bildebenen von Parallelen zur X-Achſe ſind. Da dieſe charakteriſtiſchen Ebenen außerdem den reellen Zug der abzubildenden Ebene $\mathfrak{E}$ in reellen Parallelen zur X-Achſe ſchneiden, ſind die betrachteten charakteriſtiſchen Ebenen (Horizontalebenen) Bildebenen der reellen Parallelen zur X-Achſe.

Die imaginären Parallelen zur X-Achſe haben zu Bildern im Segreſchen-R_4 die übrigen, durch die abſolute Gerade $\mathfrak{P}$ des Lieſchen R_3 laufenden, aber dieſem R_3 nicht angehörigen charakteriſtiſchen Ebenen. Sie ſchneiden den Lieſchen-R_3 alſo nur in ſeiner abſoluten Geraden $\mathfrak{P}$, die ſomit als Repräſentant zugleich aller imaginären Parallelen zur X-Achſe auftritt.

Jede nicht zur X-Achſe parallele Gerade der komplexen Ebene hat als Bildebene in der Segreſchen Abbildung eine charakteriſtiſche Ebene, die nicht durch $\mathfrak{P}$ hindurchläuft, den Lieſchen-R_3 ſomit in einer eigentlichen reellen Geraden ſchneidet, die nicht einer Horizontalebene angehört.

Umgekehrt gibt es zu jeder ſolchen Geraden eine und nur eine charakteriſtiſche Ebene, die durch ſie hindurchläuft; denn jede eigentliche reelle Gerade des R_4 (und alſo auch des Lieſchen-R_3) trifft den uneigentlichen R_3 des R_4 in einem reellen Punkte, durch den eine und nur eine abſolute Gerade hindurchläuft. Dieſe ſpannt zuſammen mit der Ausgangsgeraden die charakteriſtiſche Ebene auf.

Abbildung eines Punktes der komplexen Ebene: Geht man nun daran, Figuren der Ebene $\mathfrak{E}$ abzubilden, ſo hat man dieſe als Geradenörter aufzufaſſen.

Die Geſamtheit der durch einen reellen, dem Lieſchen-R_3 nicht angehörigen, eigentlichen Punkt p des Segreſchen-R_4 laufenden charakteriſtiſchen Ebenen ſchneidet den Lieſchen-R_3 in Geraden einer linearen Kongruenz. Leitgeraden dieſer (elliptiſchen) Kongruenz ſind diejenigen kon-

jugiert-komplexen Geraden des Lieſchen-R_3, in die die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ vom Punkte p aus projiziert werden. Sie laufen demnach durch die Punkte J, $\overline{J}$. Der Einfachheit der Bezeichnung wegen ſetzen wir voraus, daß der die Euklidiſche Metrik des Lieſchen-R_3 beſtimmende „Abſolute Kegelſchnitt" die Punkte J und $\overline{J}$ enthält. Die Leitgeraden der Bildkongruenz ſind dann Minimalgeraden. Dieſe beiden Minimalgeraden haben eine gemeinſame reelle Senkrechte, und dieſe verläuft, weil die Minimalgeraden Horizontalebenen angehören, vertikal. Eine Rotation um dieſe gemeinſame Senkrechte als Achſe läßt die ganze Kongruenz in Ruhe; es handelt ſich daher um eine Rotationskongruenz.

Die durch einen eigentlichen Punkt des Lieſchen-R_3 laufenden charakteriſtiſchen Ebenen ſchneiden den Lieſchen-R_3 in Geraden eines Geradenbündels, deſſen Scheitel der vorgegebene Punkt iſt.

Eine nicht im Bild-R_3 gelegene abſolute Gerade iſt Träger von ∞^2 charakteriſtiſchen Ebenen, die aus dem Lieſchen-R_3 ein Parallelenbündel ausſchneiden.

Die durch die abſolute Gerade $\mathfrak{P}$ des Lieſchen-R_3 laufenden charakteriſtiſchen Ebenen haben wir bereits betrachtet. Wir ſtellen zuſammen:

Komplexe Ebene	Segrescher-R_4	Liescher-R_3
Gerade allgemeiner Lage	Charakteristische Ebene	Gerade allgemeiner Lage
Reelle Parallele zur X-Achse	Charakteristische Ebene durch $\mathfrak{P}$	Horizontalebene
Imaginäre Parallele zur X-Achse	Charakteristische Ebene durch $\mathfrak{P}$	Gerade $\mathfrak{P}$
Uneigentliche Gerade	Uneigentlicher R_3 (als Ort der absol. Geraden)	Uneigentliche Ebene
Punkt allgemeiner Lage (als Ort von Geraden)	Punkt allgem. Lage (als Ort von charakteristischen Ebenen)	Rotationskongruenz
Punkt auf einer reellen Parallelen zur X-Achse	Punkt des Lieschen R_3	Geradenbündel
Uneigentlicher Punkt allgemeiner Lage	Absolute Gerade	Parallelenbündel
Uneigentlicher Punkt P (= uneigentlicher Punkt der X-Achse) als Ort von reellen Parallelen zur X-Achse	Absolute Gerade $\mathfrak{P}$	Gerade $\mathfrak{P}$ als Ort von Horizontalebenen

Wir haben hiermit gezeigt, wie ſich die Lieſchen Bilder von Geraden und Punkten der komplexen Ebene aus den Segreſchen Bildfiguren durch Schnitt gewinnen laſſen. Wir werden in den folgenden Paragraphen darangehen, andere Gebilde der komplexen Ebene zunächſt im Segreſchen-R_3 abzubilden und ihre Bildfiguren mit dem Lieſchen-R_3 zum Schnitt zu bringen.

§ 2. Der komplexe Kegelſchnitt.

4. Bild einer Kurve zweiter Ordnung im Segreſchen R_4. Die Bildfläche Γ. Wir denken uns die Ebene $\mathfrak{E}$ — wie bereits erwähnt — im Bild-R_4 gelegen und bilden ſie nach dem Segreſchen Verfahren punktweiſe auf die reellen Punkte des reellen R_4 ab: Wir verbinden insbeſondere jeden Punkt X des komplexen Kegelſchnitts C [23]) durch eine Ebene mit der Leitgeraden $\mathfrak{G}$. So erhalten wir einen quadratiſchen Zylinder k vom Range 3, deſſen Scheitelgerade die uneigentliche Gerade $\mathfrak{G}$ iſt. Die zu den Ebenen dieſes Zylinders konjugiert-komplexen Ebenen erfüllen den konjugiert-komplexen Zylinder $\bar{k}$, deſſen Scheitelgerade die zu $\mathfrak{G}$ konjugiert-komplexe Gerade $\bar{\mathfrak{G}}$ iſt. Die beiden konjugiert-komplexen Zylinder $k, \bar{k}$, ſchneiden ſich in einer reellen Mannigfaltigkeit F_2^4.

Zwei M_3^2 des R_4 ſpannen ein Büſchel von M_3^2 auf, die eine Baſismannigfaltigkeit F_2^4 gemein haben. Dies Büſchel wird im allgemeinen Falle fünf Kegel vom Range 4 enthalten. Insbeſondere ſpannen aber zwei Kegel vom Range 3 ein Büſchel von M_3^2 auf, das außer dieſen beiden Kegeln vom Range 3 nur noch einen Kegel vom Range 4 [24]) enthält. Die Baſismannigfaltigkeit F_2^4 bezeichnen wir in dieſem Falle mit Γ.

Bild eines zentriſchen Kegelſchnitts C im Segreſchen R_4 iſt der reelle Zug einer Fläche Γ.

Den eigentlichen komplexen Punkten des Kegelſchnitts C entſprechen die eigentlichen reellen Punkte von Γ. Die Fläche Γ ſchneidet den un-

[23] Von dem abzubildenden Kegelſchnitt C ſetzen wir zunächſt voraus, daß er regulär ſei und die uneigentliche Gerade in zwei verſchiedenen Punkten ſchneide.

[24] Durch Projektion von Γ auf einen R_3 entſteht eine Dupinſche Zyklide. Der Fläche Γ entſpricht die Charakteriſtik [(11)(11)1], vgl. C. Segre: Surfaces du 4e ordre à conique double, Math. Ann. 24 (1884) S. 313.

eigentlichen R_3 in einem dem Geradenpaar $\mathfrak{G}, \overline{\mathfrak{G}}$ einbeschriebenen reellen Vierseit, dessen Eckpunkte die vier Doppelpunkte von Γ sind. Zwei Seiten dieses Vierseits sind konjugiert-komplex, die beiden anderen reell und somit absolute Geraden. Diese beiden absoluten Geraden sind die Bilder der uneigentlichen Punkte des Kegelschnitts C.

Wir betrachten jetzt den Fall der Parabel. Berührt der komplexe Kegelschnitt C die uneigentliche Gerade, so berührt auch der konjugiert-komplexe Kegelschnitt $\overline{C}$ die uneigentliche Gerade. Die C und $\overline{C}$ von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ aus projizierenden Zylinder k, $\overline{k}$ haben somit einen Berührungs-R_3 gemeinsam: den uneigentlichen R_3 des Bild-R_4. Insbesondere ist dann die Leitgerade $\mathfrak{G}$ Tangente an den Zylinder $\overline{k}$ und die Leitgerade $\overline{\mathfrak{G}}$ Tangente an den Zylinder k. Die beiden Doppelpunkte p, q, in denen $\mathfrak{G}$ im allgemeinen Falle den Zylinder k schneidet, fallen somit in einen einzigen Punkt t zusammen, ebenso die auf $\overline{\mathfrak{G}}$ gelegenen Doppelpunkte r, s in den zu t konjugiert-komplexen Punkt $\overline{t}$. Die vier Geraden der Fläche Γ fallen daher in eine einzige reelle Gerade, $t\overline{t}$, zusammen [25]).

Die Bildfläche einer komplexen Parabel besitzt im Uneigentlichen eine (vierfach zählende) absolute Gerade, das Bild des einzigen uneigentlichen Punktes der Parabel.

Komplexe Ebene	Segrescher-R_4
Zentrischer Kegelschnitt	Reeller Zug einer Fläche F_2^4 mit uneigentlichem, den geraden $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ einbeschriebenen Vierseit.
Eigentlicher Punkt des Kegelschnitts	Reeller eigentlicher Punkt der F_2^4.
Uneigentlicher Punkt	Absolute Gerade der F_2^4.
Parabel	Reeller Zug einer Fläche F_2^4 mit vierfachzählender uneigentlicher Geraden.
Eigentlicher Punkt der Parabel	Reeller eigentlicher Punkt der F_2^4.
Uneigentlicher Punkt	Absolute Gerade der F_2^4.

[25] Das Büschel der M_3^2 besteht jetzt ganz aus Kegeln, die von demselben R_3 (dem uneigentlichen R_3) längs der Geraden $t\overline{t}$ berührt werden. Unter diesen Kegeln befinden sich zwei Kegel vom Range 3: die Zylinder k, $\overline{k}$. Ihre Durchschnittsfläche kann auch als Projektion einer Veroneseschen V_2^4 des R_5 von einem Punkte der Ebene einer C^3 dieser V_2^4 aus aufgefaßt werden.

Wir werden den Kegelſchnitt C im folgenden ſtillſchweigend als zentriſch vorausſetzen und nur dort, wo es erforderlich erſcheint, auf die Parabel beſonders eingehen.

5. **Das Polarſyſtem der Fläche Γ als Bild des Polarſyſtems des Kegelſchnitts C.** Wir haben bereits erwähnt, daß die beiden, die Kegelſchnitte C, $\overline{C}$ der komplexen Ebene projizierenden Zylinder k, $\overline{k}$ ein M_3^2-Büſchel aufſpannen. Mit einem ſolchen M_3^2-Büſchel, oder — wie wir auch ſagen können — mit der Baſismannigfaltigkeit F_2^4, läßt ſich ein Polarſyſtem verbinden.

Irgendein eigentlicher reeller Punkt p des R_4 hat inbezug auf die beiden konjugiert-komplexen Zylinder k, $\overline{k}$ zwei konjugiert-komplexe Polar-R_3, die ſich im allgemeinen in einer reellen Ebene g ſchneiden. Wir wollen ſie die Polarebene g des Punktes p inbezug auf die Fläche Γ nennen. Dieſe ſo gewonnene reelle Polarebene iſt eine charakteriſtiſche Ebene, denn die beiden Polar-R_3 enthalten $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, ihre Schnittebene ſchneidet daher jede der beiden Geraden.

Gehört der reelle Punkt p dem uneigentlichen R_3 des R_4 an, ſo läuft durch ihn eine einzige abſolute Gerade. Alle Punkte dieſer abſoluten Geraden gehören derſelben Ebene durch $\mathfrak{G}$ (bzw. $\overline{\mathfrak{G}}$) an; ihnen entſpricht ſomit derſelbe Polar-R_3 inbezug auf k (bzw. $\overline{k}$). So folgt, daß allen Punkten der abſoluten Geraden dieſelbe Polarebene entſpricht. Jeder abſoluten Geraden der abſoluten Kongruenz wird alſo in unſerem Polarſyſtem eine charakteriſtiſche Ebene zugeordnet.

Im Sonderfall können aber die beiden Polar-R_3 zuſammenfallen. Dies geſchieht für den Scheitel m des dem Büſchel angehörigen Kegels vom Range 4. In der Tat, denkt man ſich das M_3^2-Büſchel von dieſem Kegel und einer anderen M_3^2 des Büſchels aufgeſpannt, und konſtruiert man den Polar-R_3 des Punktes m inbezug auf alle M_3^2, ſo muß dieſer R_3 für ſämtliche M_3^2 identiſch ausfallen, weil der Polar-R_3 inbezug auf den Kegel vom Range 4 unbeſtimmt wird. Als Polar-R_3 inbezug auf k und $\overline{k}$ muß der geſuchte Polarraum $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten, und iſt daher der uneigentliche R_3 des R_4.

Legen wir jetzt wieder den abſoluten Geraden die Bezeichnung: „uneigentliche Punkte", dem uneigentlichen R_3 die Bezeichnung: „uneigentliche charakteriſtiſche Ebene" bei, ſo haben wir eine eindeutig umkehrbare, involutoriſche Verwandtſchaft zwiſchen Punkten und charakteriſtiſchen Ebenen des Bild-R_4

konſtruiert, von der wir behaupten, daß ſie in unſerer Abbildung der komplexen Ebene $\mathfrak{E}$ auf den reellen R_4 das Bild des mit dem Kegelſchnitt C verbundenen Polarſyſtems iſt.

Dies wollen wir jetzt zeigen: Der reelle Punkt x des R_4 iſt Bild eines Punktes X der komplexen Ebene, den wir erhalten, wenn wir x durch eine Ebene mit $\mathfrak{G}$ verbinden und mit der Ebene $\mathfrak{E}$ zum Schnitt bringen. Der Polar-R_3 des Punktes x inbezug auf den Zylinder k ſchneidet $\mathfrak{E}$ in einer Geraden G, die mit der Polaren des Punktes P inbezug auf den komplexen Kegelſchnitt C identiſch iſt. Der Polar-R_3 des Punktes x inbezug auf k iſt konjugiert-komplex zu dem Polar-R_3 inbezug auf $\bar{k}$. Folglich iſt die (charakteriſtiſche) Schnittebene g der beiden Polar-R_3 Segreſches Bild der Polargeraden G des Punktes X inbezug auf C, w. z. b. w.

Da, wie wir bereits ſahen, der Scheitel m des Kegels vom Range 4 Pol des uneigentlichen R_3 inbezug auf die Fläche Γ iſt, iſt dieſer Scheitel Bildpunkt des Mittelpunktes des Kegelſchnitts C.

Polarität am Kegelſchnitt C Mittelpunkt M von C	Polarſyſtem der Fläche Γ Scheitel m des Kegels vom Range 4.

6. Die reellen Tangentialebenen von Γ — Bilder der Geraden der zugehörigen Kurve 2. Klaſſe. Gehört der eigentliche reelle Punkt x der Fläche Γ ſelbſt an, ſo wird aus der Polarebene die Tangentialebene in dieſem Punkte:

Da nämlich der Punkt x der Fläche Γ angehört, gehört er auch den Kegeln k und $\bar{k}$ an. Als Punkt des Kegels k wird ihm in dem mit dem Kegel k verbundenen Polarſyſtem der Berührungs-R_3 durch dieſen Punkt an den Kegel k zugeordnet; als Punkt des Kegels $\bar{k}$ entſpricht ihm der konjugiert-komplexe R_3. Dieſe beiden R_3 ſchneiden ſich in einer (charakteriſtiſchen) Tangentialebene von Γ. Dieſe iſt ſomit das Bild einer Tangente des komplexen Kegelſchnitts.

Umgekehrt iſt jede reelle Tangentialebene charakteriſtiſch [26]) und Bild einer Tangente des Kegelſchnitts C.

---

[26]) Eine Fläche, von der jede Tangentialebene charakteriſtiſch iſt, heißt ſelbſt charakteriſtiſch (bei Study: ſynektiſch). Unſere Fläche Γ iſt daher eine charakteriſtiſche Fläche.

Es bleibt nun noch der Fall zu unterſuchen, daß der reelle Punkt p, deſſen Polarmannigfaltigkeit inbezug auf Γ gefunden werden ſoll, auf einer der abſoluten Geraden der Fläche Γ liegt. Es zeigt ſich, daß allen Punkten der abſoluten Geraden ein und dieſelbe (charakteriſtiſche) Tangentialebene entſpricht, die Verbindungsebene der abſoluten Geraden mit dem Punkte m.

Tangente in einem eigentlichen Punkte X	(Charakteriſtiſche) Tangentialebene der Fläche Γ im Bildpunkte x.
Aſymptote des zentriſchen Kegelſchnitts C.	(Charakteriſtiſche) Verbindungsebene einer abſoluten Geraden der Fläche Γ mit m.

Wir fügen hinzu, daß im Falle einer Parabel der einzigen abſoluten Geraden von Γ der uneigentliche R_3 des R_4 zugeordnet wird. Unter Verwendung der Study ſchen Terminologie wird daher der Kegelſchnitt als Ort von Geraden auf die Fläche Γ als Ort ihrer reellen Tangentialebenen abgebildet.

7. **Bild eines Kegelſchnitts im Lieſchen Bild-R_3.** In dieſer Nummer bringen wir die als Bild eines regulären Kegelſchnitts erhaltene charakteriſtiſche Fläche Γ als Ort von Punkten und Tangentialebenen mit dem Lieſchen Bild-R_3 zum Schnitt.

Als Schnitt des Punktortes — alſo als Lieſches Bild (Nullſtreifen) der abgebildeten Kurve 2. O. — erhalten wir im allgemeinen eine reelle Raumkurve 4. O., und zwar eine elliptiſche Kurve, da ſie ſich als vollſtändiger Durchſchnitt der beiden quadratiſchen Minimalzylinder $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ ergibt, in denen die „Hyperzylinder" k, $\overline{k}$ den Lieſchen-R_3 ſchneiden. Je nach der Lage der Bildfläche Γ zum Lieſchen-R_3 können Ausartungen eintreten, die wir nacheinander aufführen werden.

Als Schnitt des Ebenenortes — alſo als Lieſches Bild der Kurve 2. Klaſſe — ergibt ſich eine Linienkongruenz. Der Lieſche R_3 ſchneidet die beiden Hyperzylinder k, $\overline{k}$, wie wir bereits ſagten, in den beiden quadratiſchen Minimalzylindern $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$. Die beiden zu einer Tangentialebene t gehörigen Berührungs-R_3 der Hyperzylinder k, $\overline{k}$ ſchneiden nun den Lieſchen R_3 in zwei ebenfalls konjugiert-komplexen Berüh-

rungsebenen der Minimalzylinder $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}}$. Diese beiden Berührungsebenen schneiden sich in einer reellen Geraden $\mathfrak{T}$, der Schnittgeraden der Tangentialebene t von Γ mit dem Liesschen-R_3. Diese ist mithin das Liesche Bild einer Tangente T des komplexen Kegelschnitts. Das System der Tangenten des komplexen Kegelschnitts wird daher auf das System der gemeinsamen, reellen Tangenten der beiden Minimalzylinder $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}}$, also im allgemeinen auf den reellen Zug einer Linienkongruenz (4, 4) abgebildet. Je nach der Lage der Fläche Γ zum Liesschen-R_3 treten Ausartungen dieser Kongruenz auf. Wir bringen im folgenden eine vollständige Klassifikation aller möglichen Fälle, zusammen mit der Klassifikation der Nullstreifen:

I. Zentrische Kurven.

Der Bildfläche Γ gehören zwei verschiedene absolute Geraden an.

a) Kegelschnitt, der nicht durch den uneigentlichen Punkt der X-Achse läuft.

Keine der absoluten Geraden von Γ fällt mit der absoluten Geraden $\mathfrak{P}$ des Liesschen-R_3 zusammen.

Dann sind vom uneigentlichen Punkt der X-Achse zwei Tangenten an den Kegelschnitt möglich, d. h. durch die Gerade $\mathfrak{P}$ laufen zwei reelle Tangentialebenen an die Fläche Γ. Wir unterscheiden:

1. Die beiden Tangenten sind imaginär.

Die beiden Tangentialebenen durch $\mathfrak{P}$ gehören dem Liesschen-R_3 nicht an. (Allgemeiner Fall.)

Elliptische C^4; [1111]	Kongruenz (4, 4) der gemeinsamen Tangenten zweier Minimalzylinder allgemeiner Lage.

2. Eine der beiden Tangenten ist reell, die andere ist imaginär.

Eine der beiden Tangentialebenen durch $\mathfrak{P}$ gehört dem Liesschen-R_3 an.

C^4 mit eigentlichem Doppelpunkt; [211]	Horizontalebene [27]) und Kongruenz (4, 3) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder, die die Horizontalebene als gemeinſame Berührungsebene haben.

3. **Beide Tangenten ſind reell.**

Beide Tangentialebenen durch $\mathfrak{P}$ gehören dem Lieſchen-R_3 an.

Zwei Kurven 2. O.; [(11) 11].	Zwei Horizontalebenen [27]) und Kongruenz (4, 2) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder, die die beiden Horizontalebenen als gemeinſame Berührungsebenen haben.

b) Kegelſchnitt, der den uneigentlichen Punkt der X-Achſe enthält.

Eine der abſoluten Geraden der Fläche Γ fällt mit der abſoluten Geraden $\mathfrak{P}$ des Lieſchen-R_3 zuſammen.

1. **Die zur X-Achſe parallele Aſymptote iſt imaginär.**

Kubiſcher Kreis und die Gerade $\mathfrak{P}$; [2,2]	Kongruenz (4, 4) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder mit der gemeinſamen Erzeugenden $\mathfrak{P}$.

2. **Die zur X-Achſe parallele Aſymptote iſt reell.**

---

[27] Die Horizontalebene ſtellt als Ganzes das Bild einer reellen Parallelen zur X-Achſe dar.

Kegelſchnitt und die Gerade $\mathfrak{P}$ doppeltgezählt [29]).	Horizontalebene [28]) und Kongruenz (4, 2) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder, die ſich längs $\mathfrak{P}$ berühren, mit der Horizontalebene als Berührungsebene [28]).

II. Parabeln.

a) Der uneigentliche Punkt der Parabel iſt verſchieden von dem uneigentlichen Punkt der X-Achſe.

1. Die zur X-Achſe parallele Tangente iſt imaginär.

C^4 mit uneigentlichem Doppelpunkt; [2 11]	Uneigentliche Ebene [30]) und Kongruenz (4, 3) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder, mit der uneigentlichen Ebene als gemeinſamer Berührungsebene [30]).

2. Die zur X-Achſe parallele Tangente iſt reell.

Zwei Parabeln; [(11) 11].	Uneigentliche Ebene [30]), Horizontalebene und Kongruenz (4, 2) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder mit den beiden Ebenen als gemeinſamen Berührungsebenen.

b) Die Parabel berührt die uneigentliche Gerade im uneigentlichen Punkte der X-Achſe.

---

[28] Die horizontale Berührungsebene iſt Bild der Aſymptote.

[29] Es liegt hier ein Büſchel von Kegeln vor, wobei die Kegelſchnittebene zuſammen mit der gemeinſamen Berührungsebene den einzigen Kegel vom Range 2 darſtellen.

[30] Die uneigentliche Ebene tritt als Bild der uneigentlichen Geraden auf.

Parabel und die Gerade $\mathfrak{P}$ doppeltgezählt. [31])	Uneigenliche Ebene und Kongruenz (4, 2) der gemeinſamen Tangenten zweier Minimalzylinder, die ſich längs $\mathfrak{P}$ berühren und die uneigentliche Ebene als gemeinſame Berührungsebene haben.

8. **Pol und Polare im Lieſchen R_3.** Wir haben in Nr. 5 angegeben, wie man zu einem beliebigen Punkte des Bild-R_4 diejenige charakteriſtiſche Ebene — Polarebene des Punktes inbezug auf Γ — konſtruieren kann, die die Polare des entſprechenden Punktes der komplexen Ebene inbezug auf den Kegelſchnitt C der komplexen Ebene darſtellt. Die (charakteriſtiſchen) Polarebenen ſchneiden den Lieſchen-R_3 in Geraden, die wir als „Polargeraden" bezeichnen.

Polargeraden der Punkte des Lieſchen R_3: Die Konſtruktion [32]) der Polargeraden von Punkten, die insbeſondere dem Lieſchen-R_3 angehören, ergibt ſich aus der Konſtruktion der entſprechenden Polarebenen im Bild-R_4: Wir konſtruieren die Polarebenen (im gewöhnlichen Sinne) des Punktes inbezug auf die beiden Minimalzylinder $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}}$ und bringen die beiden (konjugiert-komplexen) Polarebenen zum Schnitt. Die (reelle) Schnittlinie iſt die geſuchte Polargerade [33]).

Den ∞^3 Punkten des Lieſchen-R_3 entſprechen ſo ∞^3 Polargeraden, die einen Linienkomplex erfüllen. Dieſen wollen wir näher unterſuchen. Wir gehen dabei auf den Segreſchen R_4 zurück.

Ein Satz von C. Segre [34]) beſagt: Die Pole eines R_3 allgemeiner Lage (insbeſondere alſo auch des Lieſchen-R_3) inbezug auf die ∞^1 M_3^2 eines

---

[31] Siehe S. 21, Anm. 29.

[32] Man vgl. S. Lie, Geſ. Abh. 1, Nr. IV, § 25 (S. 41).

[33] Dieſe Gerade kann natürlich auch als Polare des Punktes inbezug auf das durch die beiden Minimalzylinder $\mathfrak{R}$, $\overline{\mathfrak{R}}$ aufgeſpannte Büſchel von Flächen 2. O. bezeichnet werden.

[34] Vgl. etwa F. Bertini-A. Duſchek, Einführung in die projektive Geometrie mehrdimenſionaler Räume, Seidel, Wien 1924, S. 165 ff.

Büſchels bilden eine rationale Normal-C^4. Die Triſekantenebenen dieſer C^4 ſind die Polarebenen der Punkte des R_3 inbezug auf das Büſchel.

Iſt die Baſismannigfaltigkeit F_2^4 des Büſchels die Bildfläche Γ eines komplexen Kegelſchnitts C, ſo zerfällt die C^4, und zwar in die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ und einen $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ treffenden Kegelſchnitt, alſo einen Kreis: $\mathfrak{H}$; denn die C^4 muß als Ort der Pole des R_3 inbezug auf alle M_3^2 des Büſchels insbeſondere die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ enthalten.

Die den Punkten des Lieſchen-R_3 entſprechenden Polarebenen inbezug auf die Schnittfläche Γ ſind demnach die Treffebenen der Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ und eines in einer charakteriſtiſchen Ebene gelegenen Kreiſes $\mathfrak{H}$, m. a. W. die charakteriſtiſchen Treffebenen von $\mathfrak{H}$.

Dieſe Ebenenmannigfaltigkeit iſt nun mit dem Lieſchen-R_3 zum Schnitt zu bringen. Die Sekantenebenen einer Normalkurve 4. O. des R_4 ſchneiden nun einen R_3 in Geraden eines tetraedralen Komplexes [35]). Insbeſondere ſchneiden auch die Sekantenebenen unſerer zerfallenden C^4 den Lieſchen R_3 in Geraden eines ſolchen Komplexes. (Beweis für dieſen Sonderfall ſiehe auch S. 36.) Die Schnittpunkte der C^4 mit dem R_3 ſind die Ecken des Haupttetraeders dieſes Komplexes. Dieſe Eckpunkte können wir unmittelbar angeben. Es ſind erſtens: die Punkte J und $\overline{J}$, zweitens die Schnittpunkte s_1, s_2 des Kreiſes $\mathfrak{H}$ mit dem Lieſchen-R_3, die ſowohl beide reell ſein, oder zuſammenfallen, oder konjugiert-komplex ſein können [36]).

Tetraedrale Komplexe, bei denen zwei Hauptpunkte in den abſoluten Kegelſchnitt fallen, heißen nach F. Rulf [37]) zykliſch. Damit haben wir das geſuchte Reſultat:

Die Polargeraden der Punkte des Lieſchen-R_3 erfüllen einen zykliſch-tetraedralen Komplex.

Wir unterſuchen jetzt die im zykliſch-tetraedalen Komplex enthaltenen Kongruenzen und Reguli von Polargeraden, die den Punkten einer Ebene und einer Geraden des Lieſchen-R_3 entſprechen.

Polargeraden der Punkte einer Ebene des Lieſchen Bild-R_3:

a) Ebenen allgemeiner Lage: Ein zykliſch-tetraedraler Komplex enthält die Biſekantenkongruenzen von ∞^3 kubiſchen Raumkurven.

[35] A. Carronne, Rend. Acc. Napoli (3), 7, (1901), S. 57—66.
[36] Sonderfälle findet man in Nr. 15 der vorliegenden Arbeit behandelt.
[37] F. Rulf, Monatshefte Math. Phys. 21, (1910), S. 333.

Wir werden zeigen, daß die Bisekanten einer solchen kubischen Raumkurve die Polargeraden einer Ebene des Lieschen-R_3 sind.

Zunächst bilden im R_4 die Polargeraden einer Ebene inbezug auf die ∞^1 M_3^2 eines Büschels ebenfalls nach C. Segre[38]) eine rationale Regelfläche F_2^3. Die „Sekantenebenen" dieser F_2^3, die F_2^3 längs Kegelschnitten schneiden, sind die Polarebenen der Punkte der Ausgangsebene. Die zu einer Ebene des Lieschen-R_3 polare F_2^3 enthält, insbesondere den Ort C^4 der Pole des Lieschen-R_3 inbezug auf alle M_3^2 des Büschels, also die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ und den Kreis $\mathfrak{H}$. Sie schneidet demnach den Lieschen-R_3 in einer C^3, welche die Punkte J, $\overline{J}$ und s_1, s_2 enthält.

Nun hat jede Sekantenebene der F_2^3 mit einer C^3, die der F_2^3 angehört, zwei Punkte gemein. Sie schneidet demnach den Lieschen-R_3 in einer Bisekante der Schnitt-C^3 von F_2^3 mit dem Lieschen-R_3. Damit sind die Bisekanten dieser C^3 als Polargeraden der Punkte der Ausgangsebene erkannt.

Die Untersuchung bezieht sich zunächst auf Ebenen allgemeiner Lage; es bleibt uns die Untersuchung des Horizontalebenen.

b) Horizontalebenen: Diese Ebenen sind charakteristische Ebenen; den Punkten einer charakteristischen Ebene entspricht in dem mit Γ verbundenen Polarsystem das System der charakteristischen Ebenen durch den Polpunkt der Ebene. Diese charakteristischen Ebenen durch den Polpunkt schneiden den Lieschen-R_3 im allgemeinen in einer Rotationskongruenz[39]). Somit liegen — den ∞^1 Horizontalebenen des Lieschen-R_3 entsprechend — in unserem zyklisch-tetraedralen Komplex ∞^1 Rotationskongruenzen mit Leitgeraden durch J und $\overline{J}$.

Unter diesen Kongruenzen befinden sich u. U. aber zwei nicht notwendig verschiedene Geradenbündel. Den ∞^1 Horizontalebenen entspricht — wie bekannt[40]) — die Kette der reellen Parallelen zur X-Achse. Bei der Polarität an C entsteht aus der die uneigentliche Gerade enthaltenden Geradenkette π eine, durch den Mittelpunkt von C laufende Punktkette ϱ auf der Polaren des uneigentlichen Punktes der X-Achse. π schneidet die Polare in einer Punktkette π^*, und es können dann drei Fälle eintreten, je nachdem sich die Punktketten π^* und ϱ in zwei Punkten: S_1, S_2 schnei-

[38] Siehe S. 22, Anm. 34.
[39] Siehe S. 13.
[40] Siehe S. 12. Hier wird der Begriff der Kette vorausgesetzt, den wir systematisch erst in § 3 behandeln.

den, ſich berühren, oder ſich nicht ſchneiden. Im Segreſchen-R_4 entſpricht nun dieſer Punktkette ϱ ein auf der Polarebene der uneigentlichen Gerade $\mathfrak{P}$ durch den Scheitel m des Kegels vom Range 4 laufender Kreis. Es iſt der ſchon als Teil der zerfallenden C^4 genannte Kreis $\mathfrak{H}$: Die Polarebenen aller ∞^2 Punkte einer Horizontalebene erfüllen das Syſtem der ∞^2 charakteriſtiſchen Ebenen durch den der Horizontalebene entſprechenden Pol auf dem Kreis $\mathfrak{H}$. Die Schnittpunkte des Kreiſes $\mathfrak{H}$ mit dem Lieſchen-R_3 — die Bildpunkte von S_1, S_2 — ſind, wie wir wiſſen, die eigentlichen Eckpunkte s_1, s_2 des zum zykliſch-tetraedralen Komplex gehörigen Haupttetraeders. Daher gilt:

Je nachdem der Kreis $\mathfrak{H}$ den Lieſchen-R_3 in zwei verſchiedenen reellen, zwei zuſammenfallenden, oder in zwei konjugiert-komplexen Punkten ſchneidet, enthält der zykliſch-tetraedrale Komplex zwei verſchiedene, zuſammenfallende, oder keine Geradenbündel.

Polargeraden der Punkte einer Geraden des Lieſchen-R_3: Wiederum nach C. Segre[41]) gilt: Die Polarebenen einer Geraden des R_4 inbezug auf die ∞^1 M_3^2 eines Büſchels bilden eine M_3^2 vom Range 4, deren erzeugende Ebenen der einen Art die Polarebenen der Punkte der Geraden ſind. Die einer Geraden des Lieſchen-R_3 entſprechende M_3^2 muß wiederum den Ort C^4 der Pole des Lieſchen-R_3 inbezug auf die M_3^2 des Büſchels enthalten. Infolgedeſſen läuft das Hyperboloid, in dem die M_3^2 den Lieſchen-R_3 ſchneidet, durch J und J[42]) und die beiden Punkte s_1, s_2, alſo durch die vier Tetraederpunkte. Den Punkten einer Geraden entſprechen ſomit als „Polargeraden“ die dem zykliſch-tetraedralen Komplex angehörenden Erzeugenden eines durch die vier Eckpunkte des Komplextetraeders laufenden Hyperboloids.

§ 3. Die Ketten der komplexen Ebene.

9. **Die binäre Punktkette.** In § 2 haben wir als Beiſpiel für Kurven der komplexen Ebene den Kegelſchnitt behandelt. In dem nun folgenden Paragraphen ſollen die Segreſchen und Lieſchen Bilder derjenigen

---

[41] Siehe S. 22, Anm. 34.
[42] Es hat alſo horizontale Kreisſchnitte.

Gebilde der komplexen Ebene aufgeſucht werden, die von von Staudt[43]), C. Segre[44]), C. Juel[45]) in die Geometrie eingeführt worden ſind und die als Ketten (catene) bezeichnet werden.

In der komplexen Ebene können wir eindimenſionale, zweidimenſionale, dreidimenſionale Punktmannigfaltigkeiten unterſcheiden. Sie werden als Fäden (fili), Membrane (tele), Punktkomplexe[46]) bezeichnet. Ihnen werden im Segreſchen-R_4 die reellen Züge von Kurven, Flächen, Hyperflächen entſprechen. Spezielle Punktmannigfaltigkeiten dieſer Art ſind die Punktketten. Zu ihnen ſind ein-, zwei-, und dreidimenſionale[47]) Geradenketten dual. In den Nr. 9, 10 behandeln wir die eindimenſionalen Ketten, in den Nr. 11, 12 die zweidimenſionalen, in der Nr. 13 die dreidimenſionalen[47]) Ketten.

Eine binäre Punktkette der komplexen Ebene iſt ein Faden, der komplex projektiv aequivalent zu dem Faden der reellen Punkte einer reellen Geraden iſt.

Eine ſolche Punktkette liegt alſo ſtets auf einer Geraden, ihre Abbildung iſt daher in der Abbildung dieſer Geraden auf die entſprechende charakteriſtiſche Ebene enthalten. Die charakteriſtiſche Ebene wird hierbei das Gaußſche Bild[48]) der Geraden, und es iſt bekannt, daß hierbei die Kreiſe (und Geraden) den binären Punktketten der komplexen Geraden entſprechen. Die möglichen Sonderfälle ſtellen wir in einer Tabelle zuſammen:

∞^7 binäre Punktketten ohne uneigentlichen Punkt.	∞^7 Kreiſe in charakteriſtiſchen Ebenen.
∞^6 „Normalketten", d. s. Ketten mit uneigentlichem Punkt.[49])	∞^6 Geraden (in charakteriſtiſchen Ebenen).
∞^3 uneigentliche Punktketten.	∞^3 Kreiſe der uneigentlichen charakteriſtiſchen Ebene[50]) = Reguli der abſoluten Kongruenz.

[43] G. C. Chr. v. Staudt: Beiträge zur Geometrie der Lage, insbeſondere 2. Heft, Nürnberg, 1857, § 15.

[44] Siehe S. 5, Anm. 5.

[45] Siehe S. 5, Anm. 4.

[46] Nach H. Beck, Koordinatengeometrie, Berlin, Springer, 1919, S. 199.

[47] Nach E. Study, Das Imaginäre in der ebenen Geometrie, 2. Teil, herausgeg. E. A. Weiß. Bonn, 1933 und 1934, S. 118.

[48] Vgl. S. 9.

Soweit die Bilder der auf eigentlichen Geraden gelegenen binären Punktketten nicht ganz dem Liefchen R_3 angehören, fchneiden fie diefen R_3 entweder überhaupt nicht, oder in Punkten, oder in Punktepaaren, die jedoch als Bildfiguren nicht in Frage kommen.

Die auf den reellen Parallelen zur X-Achfe gelegenen binären Punktketten werden auf die Kreife (und Geraden) der Horizontalebenen abgebildet. Der Bild-Regulus einer Kette uneigentlicher Punkte fchneidet fchließlich die uneigentliche Ebene des Liefchen-R_3 in dem reellen Zuge eines durch $J, \bar{J}$ laufenden Kegelfchnittes [51]).

10. **Die binäre Geradenkette.** Größeres Intereffe als die binären Punktketten bieten die binären Geradenketten, weil die ihnen entfprechenden Syfteme charakteriftifcher Ebenen den Liefchen-R_3 in Figuren fchneiden, auf welche fich die Geradenketten i. a. eindeutig abbilden laffen.

Binäre Geradenketten werden dual zu den binären Punktketten definiert. Daraus folgt dann, daß eine binäre Geradenkette eine jede Gerade, die nicht durch den Scheitelpunkt der Geradenkette hindurchläuft, in einer binären Punktkette fchneidet, und umgekehrt, daß eine binäre Punktkette von einem jedem Punkte, der nicht ihrer Trägergeraden angehört, durch eine binäre Geradenkette projiziert wird. Diefe Bemerkung ermöglicht uns die Abbildung der binären Geradenketten im Segrefchen Bild-R_4:

Eine Geradenkette fchneidet die uneigentliche Gerade der komplexen Ebene in einer binären Punktkette. Wir erhalten demnach eine folche binäre Geradenkette, wenn wir die auf der uneigentlichen Geraden ausgefchnittene Punktkette von einem (eigentlichen) Punkte aus projizieren, und demnach das Bild einer binären Geradenkette im R_4, wenn wir den Bildregulus der uneigentlichen Punktkette von einem eigentlichen reellen Punkte des R_4 projizieren. Als Bild der Geraden einer binären Geradenkette erhalten wir fomit die eine Schar

[49] Nach E. Study, a. a. O., Anm. 34a, S. 120 (§ 13).
[50] Siehe S. 10.
[51] Faßt man die uneigentliche Ebene als Gaußfches Bild der uneigentlichen Geraden auf, fo kann auch diefer Kegelfchnitt als Kreis bezeichnet werden.

von erzeugenden (charakteriſtiſchen) Ebenen eines Hyperkegels M_3^2 vom Range 4.

Hierbei iſt der Scheitel der Geradenkette als eigentlicher Punkt vorausgeſetzt. Die Unterſuchung aller übrigen Möglichkeiten führt zu folgender Klaſſifikation:

I. Binäre Geradenkette mit eigentlichem Scheitel.

Eine Schar von erzeugenden (charakteriſtiſchen) Ebenen eines Hyperkegels M_3^2 vom Range 4.

II. Binäre Geradenkette mit uneigentlichem Scheitel.

A.) Die uneigentliche Gerade gehört der Geradenkette nicht an.

Erzeugende (charakteriſtiſche) Ebenen eines Hyperzylinders M_3^2 vom Range 3.

Uneigentlicher Scheitel der Geradenkette.	Abſolute Scheitelgerade des Hyperzylinders.

B.) Die uneigentliche Gerade gehört der Geradenkette an.

Die M_3^2 zerfällt in zwei R_3, von denen einer der uneigentliche R_3 des R_4 iſt. (M_3^2 vom Range 2).

Uneigentlicher Scheitel der Geradenkette.	Abſolute Gerade des eigentlichen R_3.
Eigentliche Geraden der Geradenkette.	(Charakteriſtiſche) Ebenen durch die Gerade, die ganz im eigentlichen R_3 verlaufen.
Uneigentliche Gerade.	Uneigentlicher R_3 (uneigentliche charakteriſtiſche Ebene).

Bild einer binären Geradenkette im Lieſchen-R_3: Bringen wir nun die Bildmannigfaltigkeit einer binären Geradenkette im Segreſchen Bild-R_4 mit dem Lieſchen Bild-R_3 zum Schnitt, ſo haben wir die verſchiedenen Möglichkeiten zu berückſichtigen, die durch ſpezielle Lage des Lieſchen-R_3 inbezug auf die Bildmannigfaltigkeit entſtehen.

I. Geradenkette mit eigentlichem Scheitel.

a) Der Scheitel der Geradenkette liegt nicht auf einer reellen Parallelen zur X-Achſe.

1. **Die Geradenkette enthält keine (imaginäre) Parallele zur X-Achſe.** Die eine Schar von erzeugenden (charakteriſtiſchen) Ebenen des Hyperkegels vom Range 4, der Segreſches Bild der Geradenkette iſt, trifft den Lieſchen-R_3 in einer Schar von Erzeugenden eines Hyperboloides. Eine beliebige charakteriſtiſche Ebene allgemeiner Lage, insbeſondere eine charakteriſtiſche Ebene des Lieſchen-R_3, ſchneidet den Hyperkegel in einem Kreiſe:

Zentriſches Hyperboloid mit horizontalen Kreisſchnitten.

2. **Die binäre Geradenkette enthält eine imaginäre Parallele zur X-Achſe.**

Hyperboliſches Paraboloid mit einer Schar horizontaler Erzeugenden [52]).

b) Der Scheitel der Geradenkette liegt auf einer reellen Parallelen zur X-Achſe.

1. **Die Geradenkette enthält die reelle Parallele zur X-Achſe nicht.**

Kegel 2. O. mit horizontalen Kreisſchnitten.

2. **Die Geradenkette enthält die reelle Parallele zur X-Achſe.**

Geradenbüſchel und Horizontalebene. [53])

II. Der Scheitel der Geradenkette iſt uneigentlich.

A. Die uneigentliche Gerade gehört der Geradenkette nicht an.

a) Der Scheitel der Geradenkette iſt verſchieden von dem uneigentlichen Punkte der X-Achſe.

Zylinder 2. O. mit horizontalen Kreisſchnitten.

b) Der Scheitel der Geradenkette fällt mit dem uneigentlichen Punkte der X-Achſe zuſammen.

Wir haben nun zwei Geradenketten mit dem gleichen Scheitel: die Kette der reellen Parallelen zur X-Achſe und die abzubildende Kette. Dieſe haben entweder zwei oder eine oder keine Gerade gemeinſam. Entſprechend:

---

[52] Bild der imaginären Parallelen zur X-Achſe iſt die Gerade $\mathfrak{P}$, die ſomit dem Hyperboloid angehört. Die Kreiſe des allgemeinen Falles zerfallen in $\mathfrak{P}$ und eine horizontale Erzeugende des Hyperboloids.

[53] Die letztere iſt Gaußſches Bild der reellen Parallelen zur X-Achſe.

1. Paar von Horizontalebenen und die Gerade $\mathfrak{P}$.

2. Doppeltzählende Horizontalebene und die Gerade $\mathfrak{P}$.

3. Die Gerade $\mathfrak{P}$.

B. **Die uneigentliche Gerade gehört der Geradenkette an.**

a) Der Scheitel der Geradenkette ist verschieden von dem uneigentlichen Punkte der X-Achse.

Parallelenbüschel und die uneigentliche Ebene.

b) Der Scheitel der Geradenkette ist der uneigentliche Punkt der X-Achse.

Uneigentliche Ebene, Horizontalebene und die Gerade $\mathfrak{P}$.

c) Im Sonderfalle kann es eintreten, daß die abzubildende Geradenkette mit der Kette der reellen Parallelen zur X-Achse zusammenfällt. (Der Liesche-R_3 kann somit als Bild einer Geradenkette betrachtet werden, die die uneigentliche Gerade enthält und den uneigentlichen Punkt der X-Achse zum Scheitel hat.)

Der Liesche-R_3.

11. **Zweidimensionale Ketten: Bild einer ternären Punkt- und Geradenkette im Segreschen Bild-R_4.** Eine in der komplexen Ebene $\mathfrak{E}$ gelegene ternäre Punktkette wird von der Geraden $\mathfrak{G}$ aus durch eine ternäre Ebenenkette $\mathfrak{N}$ projiziert. Wir erhalten das Bild der ternären Punktkette als Erzeugnis der ternären Ebenenkette $\mathfrak{N}$ durch $\mathfrak{G}$ und der konjugiert-komplexen Ebenenkette $\overline{\mathfrak{N}}$ durch $\overline{\mathfrak{G}}$.

Durch die Antiprojektivität zwischen den ternären Ebenenketten ist sowohl eine Antiprojektivität als auch eine Projektivität zwischen den zugehörigen Ebenenbündeln $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ festgelegt[34]. Antiprojektivität und Projektivität transformieren die Ebenen des Bündels $\mathfrak{G}$, soweit sie der ternären Kette angehören, in der gleichen Weise. Das Erzeugnis der durch das Konjugium aufeinander bezogenen Ebenenketten $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ ist daher in dem Erzeugnis der projektiv aufeinander bezogenen Ebenenbündel, einer durch die Trägergeraden $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ laufenden rationalen normalen Regelfläche F_2^4, enthalten. Da sich zwei konjugiert-komplexe Ebenen in einem reellen Punkte schneiden, gilt:

[34] In der Ebene wird durch das Schicksal von 4 reellen Punkten sowohl eine Kollineation wie eine Antikollineation festgelegt, und diese beiden Transformationen transformieren die Kette der reellen Punkte in gleicher Weise.

Das Segresche Bild einer ternären Punktkette ist der reelle Zug einer durch $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$ laufenden rationalen normalen Regelfläche F_2^3.

Eine Gerade der komplexen Ebene schneidet nun eine ternäre Kette entweder in einem einzigen Punkt oder in einer binären Punktkette. Im letzten Falle heißt die Gerade mit der ternären Kette „vereinigt". Im allgemeinen Falle schneidet also die abzubildende Kette die uneigentliche Gerade in einem uneigentlichen Punkte A, der auf eine absolute Gerade $\mathfrak{A}$ abgebildet wird. Diese wird die Leitgerade der F_2^3. Denn die binäre Kette der durch A laufenden, mit unserer ternären Kette vereinigt liegenden Geraden schneidet die ternäre Kette in einem System von ∞^1 Normalketten, die sich auf die ∞^1 Erzeugenden unserer F_2^3 abbilden. Wie alle Normalketten durch A laufen, so schneiden alle Erzeugende von F_2^3 die Gerade $\mathfrak{A}$.

Ternäre Kette	F_2^3
Uneigentlicher Punkt	Leitgerade der F_2^3
Normalkette auf der ternären Kette	Erzeugende der F_2^3

Hiermit ist der allgemeine Fall beschrieben; die Untersuchung der Sonderfälle führt zu folgender Klassifikation:

∞^8 ternäre Punktketten, die mit der uneigentlichen Geraden nicht vereinigt liegen.	Reelle Züge von ∞^8 Flächen F_2^3 durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$.
∞^6 ternäre Punktketten, die mit der uneigentlichen Geraden vereinigt liegen.	∞^6 Figuren eines Regulus aus absoluten Geraden und einer eigentlichen Ebene, deren uneigentliche Spur die Geraden dieses Regulus schneidet.

Ternäre Geradenkette: Mit einer ternären Punktkette ist eine ternäre Geradenkette invariant verbunden: das System der mit der Punktkette vereinigt liegenden Geraden. Das Segresche Bild einer ternären Geradenkette ist daher der Ort aller der charakteristischen

Ebenen, welche die Bildmannigfaltigkeit der entſprechenden Punktkette in Bildern binärer Ketten, Kegelſchnitten durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, ſchneiden.

Im Falle einer ternären Kette mit einem einzigen uneigentlichen Punkt haben wir unter den mit der Punktkette vereinigt liegenden Geraden ſolche zu unterſcheiden, die den Punkt A enthalten von ſolchen, die den Punkt nicht enthalten. Die ∞^1 Geraden der erſten Art, welche die Punktkette in Normalketten ſchneiden, werden auf die charakteriſtiſchen Ebenen abgebildet, welche die Gerade $\mathfrak{A}$ mit den Erzeugenden der Regelfläche verbinden. Die ∞^2 Geraden der zweiten Art werden auf charakteriſtiſche Ebenen abgebildet, welche die F_2^3 längs Kegelſchnitten ſchneiden. Dieſe Ebenen ergeben ſich als Schnittebenen entſprechender R_3 in der durch die Projektivität der Ebenenbündel $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ erzeugten kontragredienten Projektivität.

Im Sonderfalle der mit der uneigentlichen Geraden vereinigt liegenden Punktkette werden die binären Ketten, die die vereinigt liegenden Geraden aus der ternären Punktkette ausſchneiden, ſämtlich Normalketten, welchen die Geraden der eigentlichen nichtcharakteriſtiſchen Bildebene der ternären Punktkette zugeordnet werden. Man erhält die entſprechenden charakteriſtiſchen Ebenen, wenn man jede dieſer Geraden mit der inzidenten abſoluten Geraden verbindet.

12. Bild einer ternären Punkt- und Geradenkette im Lieſchen-R_3. Als Segreſches Bild hatte ſich im allgemeinen Falle eine rationale kubiſche Normal-F_2^3 ergeben, welche die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält. Bringen wir dieſe mit dem Lieſchen-R_3 zum Schnitt, ſo folgt im Lieſchen-R_3 als Nullſtreifen der ternären Punktkette eine kubiſche Raumkurve, die durch die Punkte J, $\overline{\mathrm{J}}$ hindurchläuft, ein kubiſcher Kreis.

Die Geraden der mit der Punktkette invariant verbundenen Geradenkette haben zu Bildern im Segreſchen-R_4 die (∞^2) charakteriſtiſchen Sekantenebenen der F_2^3 durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$. Dieſe ſchneiden den Lieſchen-R_3 in den Geraden einer Kongruenz, der Biſekantenkongruenz des kubiſchen Kreiſes, in dem die F_2^3 den Lieſchen-R_3 ſchneidet. Dabei treten verſchiedene Fälle auf, je nach der Lage, die die F_2^3 zum Lieſchen R_3 einnimmt. Wir bringen im folgenden wieder eine vollſtändige Klaſſifikation dieſer Fälle.

I. Die uneigentliche Gerade liegt nicht mit der ternären Punktkette vereinigt.

a) Der (einzige) uneigentliche Punkt der Kette iſt verſchieden von dem uneigentlichen Punkt der X-Achſe.

Durch den uneigentlichen Punkt der X-Achſe läuft dann eine einzige mit der Kette vereinigt liegende Gerade.

1. **Die mit der Kette vereinigt liegende zur X-Achſe parallele Gerade iſt imaginär.** (Allgemeiner Fall.)

Kubiſcher Kreis durch $J, \bar{J}$	Biſekantenkongruenz (1, 3) dieſer Kurve

2. **Die mit der Kette vereinigt liegende, zur X-Achſe parallele Gerade iſt reell.**

Kreis der Horizontalebene und eine ihn treffende Gerade	Horizontalebene (als Bild der reellen Parallelen zur X-Achſe) und Kongruenz (1, 2)

b) Der uneigentliche Punkt der ternären Punktkette iſt der uneigentliche Punkt der X-Achſe. Dann läuft durch ihn eine binäre Geradenkette von Geraden, die mit der ternären Punktkette vereinigt liegen. Die binäre Geradenkette und die Kette der reellen Parallelen zur X-Achſe haben dann entweder zwei (reelle) Geraden, oder eine doppeltzählende (reelle) Gerade, oder keine Gerade gemeinſam. Entſprechend ſind folgende Fälle zu unterſcheiden:

1. **Die ternäre Punktkette liegt mit zwei reellen Parallelen zur X-Achſe vereinigt.**

Gerade $\mathfrak{P}$ und zwei (horizontale) Treffgeraden	Zwei Horizontalebenen und hyperboliſche Kongruenz (1,1)

2. **Die ternäre Punktkette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achſe und liegt mit einer einzigen reellen Parallelen zur X-Achſe vereinigt.**

Gerade $\mathfrak{P}$ und (horizontale) Treffgerade doppeltgezählt	Horizontalebene und paraboliſche Kongruenz (1, 1)

3. Die ternäre Punktkette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achse, liegt aber mit keiner reellen Parallelen zur X-Achse vereinigt.

Gerade $\mathfrak{P}$	Elliptische Kongruenz (1, 1)

II. Die uneigentliche Gerade liegt mit der ternären Punktkette vereinigt.

a) Die uneigentliche binäre Kette der ternären Punktkette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achse nicht.

Uneigentlicher „Kreis" und eine ihn treffende Gerade	Uneigentliche Ebene und Kongruenz (1, 2)

b) Die uneigentliche binäre Kette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achse.

Durch diesen Punkt läuft dann eine binäre Geradenkette von Geraden, die mit der ternären Punktkette vereinigt liegen. Diese und die Kette der reellen Parallelen zur X-Achse haben außer der uneigentlichen Geraden entweder eine oder keine Gerade gemeinsam oder sie können schließlich noch identisch sein. Dementsprechend:

1.

Gerade $\mathfrak{P}$, eigentliche Treffgerade und eine uneigentliche Gerade	Horizontalebene, uneigentliche Ebene und hyperbolische Kongruenz (1, 1) mit einer uneigentlichen Leitgeraden

2.

Gerade $\mathfrak{P}$ und uneigentliche Gerade doppeltgezählt	Uneigentliche Ebene und parabolische Kongruenz mit uneigentlicher Leitlinie

3.

Gerade $\mathfrak{P}$ und eine eigentliche Ebene	Die ∞^1 Horizontalebenen und das Geradenfeld der eigentlichen Ebene.

Ein Beiſpiel für den letzten Fall II, b, 3 iſt der reelle Zug der komplexen Ebene $\mathfrak{E}$.

13. **Bilder dreidimenſionaler**[55]) **Punkt- und Geradenketten im Segreſchen-R_4 und im Lieſchen Bild-R_3.** Dreidimenſionale Punktkette heißt die Geſamtheit aller Punkte, die auf den Geraden einer binären Geradenkette liegen.

Den drei Arten binärer Geradenketten (vgl. S. 28) entſprechend haben wir drei Arten dreidimenſionaler Punktketten zu unterſcheiden. Dieſe werden im Segreſchen-R_4 auf dieſelben Mannigfaltigkeiten abgebildet, die aber nun als Örter von Punkten anzuſehen ſind. Die Lieſchen Bilder dreidimenſionaler Punktketten ſind ebenſo mit den Lieſchen Bildfiguren der entſprechenden binären Geradenketten identiſch.

Eine beſondere Behandlung erfordern die dual zu definierenden dreidimenſionalen Geradenketten. Den drei verſchiedenen Arten binärer Punktketten (vgl. S. 26) entſprechend haben wir auch hier drei Fälle zu unterſcheiden.

I. Binäre Punktkette ohne uneigentlichen Punkt als Ort von Geraden:
Charakteriſtiſche Treffebenen eines Kreiſes in einer charakteriſtiſchen Ebene.

II. Binäre Punktkette mit uneigentlichem Punkt als Ort von Geraden:
Charakteriſtiſche Treffebenen einer eigentlichen Geraden.

III. Binäre Punktkette der uneigentlichen Geraden als Ort von Geraden:
Regulus der abſoluten Kongruenz als Ort von charakteriſtiſchen Ebenen.

Dieſe Bildmannigfaltigkeiten bringen wir mit dem Lieſchen-R_3 zum Schnitt:

Bilder dreidimenſionaler Geradenketten im Lieſchen-R_3:

I. Binäre Punktkette ohne uneigentlichen Punkt.

a) Die binäre Punktkette hat allgemeine Lage zur Kette der reellen Parallelen zur X-Achſe.

Der Bildkreis der binären Punktkette ſchneidet den Lieſchen-R_3 in zwei verſchiedenen Punkten (welche mit J, $\bar{J}$ nicht identiſch ſind). Nach Nr. 9 S. 25 ergibt ſich:

[55] Vgl. S. 26, Anm. 47.

Zyklifch-tetraedraler Komplex mit $J, \bar{J}, s_1, s_2$ als Eckpunkten des Haupttetraeders.

Diefen Sachverhalt wollen wir nun ohne Heranziehung des zitierten allgemeinen Satzes[56]) auch dadurch beweifen, daß wir eine Konftruktion für den tetraedralen Komplex angeben, die im Zufammenhang mit der Geradenkugeltransformation von Wichtigkeit wird:

Die beiden projektiven Ebenenbüfchel durch $\mathfrak{G}$ und $\bar{\mathfrak{G}}$, welche den Bildkreis $\mathfrak{H}$ der binären Punktkette erzeugen, fchneiden den Liefchen-R_3 in zwei projektiven Geradenbüfcheln durch die Punkte J und $\bar{J}$. Die Verbindungsgerade $\mathfrak{P} = J\bar{J}$ gehört dabei — entfprechend unferen Vorausfetzungen — keinem der Geradenbüfchel an. Die charakteriftifchen Ebenen der Ebenenmannigfaltigkeit I fchneiden dann den Liefchen-R_3 in den reellen Treffgeraden je zweier zugeordneter Geraden. Diefe erfüllen bekanntlich einen tetraedralen Komplex.

b) Die binäre Punktkette hat mit der Kette der reellen Parallelen einen Punkt gemein.

Der Bildkreis berührt nun den Liefchen-R_3:

Kollineationskomplex; [(22)(11)]

c) Die binäre Punktkette liegt auf einer imaginären Parallelen zur X-Achfe.

Der Bildkreis fchneidet den Liefchen-R_3 in den Punkten $J, \bar{J}$:

Kollineationskomplex; [(211)(11)]

d) Die binäre Punktkette liegt auf einer reellen Parallelen zur X-Achfe.

Der Bildkreis liegt in einer Horizontalebene des LiefchenR$_3$:

Treffgeradenkomplex eines Kreifes in einer Horizontalebene; [(222)]

Wir kommen jetzt zu dem Fall II, bei dem es fich um die Mannigfaltigkeit der charakeriftifchen Treffebenen einer eigentlichen Geraden handelt.

II. Binäre Punktkette mit uneigentlichem Punkt.

a) Die binäre Punktkette hat allgemeine Lage inbezug auf die Kette der reellen Parallelen zur X-Achfe.

---

[56]) Siehe S. 22.

Zykliſch-tetraedraler Komplex[57]) mit der uneigentlichen Ebene als Ebene des Haupttetraeders.

b) Die Trägergerade der binären Punktkette läuft nicht durch den uneigentlichen Punkt der X-Achſe, die Punktkette wird auf der Trägergeraden durch die Kette der reellen Parallelen zur X-Achſe ausgeſchnitten.

Treffgeradenkomplex einer eigentlichen Geraden und Büſchel der Ebenen durch $\mathfrak{P}$[58]).

c) Die Trägergerade der binären Punktkette iſt eine imaginäre Parallele zur X-Achſe.

Regulärer linearer Komplex, der die Gerade $\mathfrak{P}$ enthält und Büſchel der Ebenen durch $\mathfrak{P}$[58]).

Die beiden projektiven Geradenbüſchel durch J, $\overline{J}$ (vgl. I, a; S. 36) liegen nun ſo, daß ſie einen Strahl entſprechend gemeinſam haben, ihre Scheitel und Ebenen jedoch verſchieden ſind. Die Trefflinien entſprechender Geraden erzeugen nach Sylveſter einen linearen Komplex.

d) Die Trägergerade der binären Punktkette iſt eine reelle Parallele zur X-Achſe.

Treffgeradenkomplex einer horizontalen Geraden; dazu das Büſchel der Ebenen durch $\mathfrak{P}$[58]).

III. Binäre Punktkette der uneigentlichen Geraden.

Im Falle III iſt ſchließlich ein Regulus aus abſoluten Geraden Bild der binären Punktkette.

a) Die binäre Punktkette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achſe nicht.

Der Bildregulus ſchneidet den Lieſchen-R_3 in einem regulären Kegelſchnitt durch J, $\overline{J}$:

Treffgeradenkomplex eines durch J, $\overline{J}$ laufenden regulären Kegelſchnitts der uneigentlichen Ebene.

b) Die binäre Punktkette enthält den uneigentlichen Punkt der X-Achſe.

Der Bildregulus berührt den Lieſchen R_3:

Treffgeradenkomplex einer uneigentlichen Geraden und Büſchel der Ebenen durch $\mathfrak{P}$.

---

[57] Daß der Komplex tetraedral iſt, folgt auch nach einem bekannten Satz von C. Segre. Alcune considerazioni elementari sull' incidenza di rette e piani nello spazio a 4 dimensioni, Palermo Rend. 2, (1888), S. 45 bis 52.

[58] In den Fällen II b, c, d zerfällt der (quadratiſche) tetraedrale Komplex in zwei lineare Komplexe!

§ 4. Ketten auf Kegelschnitten.

14. **Bilder von Punktketten auf Kurven 2. O. im Segreschen-R_4 und im Lieschen Bild-R_3.** Der reelle Zug eines Kegelschnitts wird bei der Segreschen und auch bei der Lieschen Abbildung auf sich selbst abgebildet. Unterwirft man ihn einer komplexen Kollineation, so erhält man eine Figur, die wir „binäre Kette auf einem Kegelschnitt" nennen. Der Kegelschnitt ist wie die Gerade ein komplex-binäres Gebiet und enthält wie diese ∞^3 binäre Punktketten. Die Bilder dieser Punktketten sind von Lie als S-Kurven[59]) bezeichnet worden und, ohne ganz in ihrer Bedeutung im Zusammenhang mit der komplexen Geometrie erkannt worden zu sein, untersucht worden. Wir geben hier eine systematische Ableitung dieser Bildfiguren, indem wir wie früher zunächst die Segreschen Bilder der binären Ketten eines komplexen Kegelschnitts aufsuchen. Die Überlegenheit dieser Methode der Lieschen Methode gegenüber zeigt sich an diesem Beispiel besonders deutlich; denn da bei Lie der allgemeine Fall, der Natur der Sache nach, nicht vorkommen kann, können auch die von ihm betrachteten Sonderfälle nicht als Spezialfälle ein und derselben Figur erkannt werden.

Wir beginnen damit, eine Kette γ des in $\mathfrak{E}$ gelegenen komplexen Kegelschnitts C im Segreschen R_4 abzubilden.

Die die Punkte der Kette γ von der Geraden $\mathfrak{G}$ aus projizierenden Ebenen bilden eine (eindimensionale) Ebenenkette auf dem binären Gebiet der erzeugenden Ebenen des den Kegelschnitt C projizierenden Hyperkegels k. Die zu den Punkten der Kette γ konjugiert komplexen Punkte erfüllen eine Kette $\bar{\gamma}$ auf dem konjugiert-komplexen Kegelschnitt $\bar{C}$; infolgedessen erfüllen die zu den Ebenen der Ebenenkette auf dem Hyperkegel k konjugiert-komplexen Ebenen (sie projizieren $\bar{\gamma}$ von $\bar{\mathfrak{G}}$ aus) ebenfalls eine eindimensionale Ebenenkette auf dem Hyperkegel $\bar{k}$. Deren Ebenen sind somit auf die Ebenen der ersten Ebenenkette durch das Konjugium, also antiprojektiv bezogen. Welches ist nun das Erzeugnis entsprechender Ebenen der Ebenenketten auf den Hyperkegeln $\bar{k}$, k?

Wir haben hier dieselbe Überlegung anzustellen, die uns im § 3 des öfteren begegnete und die charakteristisch für die ganze Abbildungsmethode ist. Die beiden antiprojektiv aufeinander bezogenen Ebenenketten auf den Hyperkegeln k, $\bar{k}$ bestimmen eine Antiprojektivität zwi-

[59] Siehe S. Lie, Ges. Abh. 1, Nr. III, S. 23 (§ 11), Nr. IV, S. 35 (§ 22).

ſchen den erzeugenden Ebenen der beiden Hyperkegel k, $\overline{k}$. Entſprechende Ebenen erzeugen den reellen Zug der Bildfläche Γ des Kegelſchnitts C. Durch das Schickſal von drei Ebenen einer der Ebenenketten iſt zugleich eine Projektivität zwiſchen den erzeugenden Ebenen der Hyperkegel k, $\overline{k}$ beſtimmt. Der Ort der Schnittpunkte der einander in einer Projektivität entſprechenden Ebenen iſt eine Normalkurve 4. O.[60]) Die Projektivität fällt nun, ſoweit es ſich um Ebenen der Ebenenketten handelt, mit der obigen Antiprojektivität zuſammen und als Erzeugnis der beiden antiprojektiv aufeinander bezogenen Ebenenketten ergibt ſich der reelle Zug einer der Fläche Γ angehörenden rationalen Normalkurve 4. O.

Wir ſtellen die als Bildkurven von Ketten auf Kegelſchnitten auftretenden Kurven in einer Überſicht zuſammen.

Zunächſt ſetzen wir voraus:

I. Die zur Kette gehörende Kurve C iſt zentriſch.

a) Die Kette enthält keinen der beiden uneigentlichen Punkte der Kurve.

1. Bild einer ſolchen Kette iſt im allgemeinen Falle der reelle Zug einer rationalen Normalkurve 4. O., die durch die vier uneigentlichen Doppelpunkte der Bildfläche Γ des Kegelſchnitts C läuft.

2. Die C^4 zerfällt, wenn in der zwiſchen den beiden Kegelſchnitten C, $\overline{C}$ erklärten Projektivität den uneigentlichen Punkten des Kegelſchnitts C die uneigentlichen Punkte des Kegelſchnitts $\overline{C}$ zugeordnet werden, wobei dann einem ſolchen uneigentlichen Punkte von C der nicht zu ihm konjugiert-komplexe uneigentliche Punkt von $\overline{C}$ entſprechen muß. Das Erzeugnis zerfällt dann in einen Kegelſchnitt und die beiden nicht abſoluten Geraden der Bildfläche Γ, ſodaß als Bildkurve der Kette nur der reelle Zug eines Kegelſchnitts erſcheint.

b) Die Kette enthält einen uneigentlichen Punkt. Die Bildkurve der Kette beſteht nun aus dem reellen Zug einer Normalkurve 3. O., die durch zwei konjugiert-komplexe der vier Doppelpunkte von Γ hindurchläuft, und derjenigen abſoluten Geraden, die nicht ihre Biſekante iſt.

[60] Die Graßmannſchen Koordinaten einer Ebene des Kegels k ſind in dem binären Parameter λ quadratiſch, die Ebenen des projektiv auf ihn bezogenen Kegels ſind in demſelben Parameter λ quadratiſch: die Parameter des Schnittpunktes entſprechender Ebenen alſo vom 4. Grade in λ.

c) Die Kette enthält die beiden uneigentlichen Punkte der Kurve.

Nun ergibt ſich als Bild der Kette der reelle Zug eines Kegelſchnitts und die beiden abſoluten Geraden der Fläche Γ, deren jede den Kegelſchnitt in einem (reellen) Punkte trifft.

Weiterhin nehmen wir nun an:

II. Die zur Kette gehörende Kurve iſt eine Parabel.

a) Die Kette enthält den uneigentlichen Punkt der Parabel nicht.

Bildkurven ſind die reellen Züge von Normalkurven 4. O., die den uneigentlichen R_3 in den Schnittpunkten der abſoluten Geraden mit den Geraden $\mathfrak{G}$, $\bar{\mathfrak{G}}$ berühren.

b) Die Kette enthält den uneigentlichen Punkt der Parabel.

Bildkurven ſind die reellen Züge von Parabeln, die den uneigentlichen R_3 in einem Punkte der abſoluten Geraden von Γ berühren und dieſe abſolute Gerade (doppeltzählend).

Da der Schnitt einer C^4 mit dem Lieſchen R_3 nur Punkte liefert, hat es nur Sinn, diejenigen Fälle zu betrachten, in denen ein Teil der zerfallenden C^4 dem Lieſchen R_3 angehört. Dies tritt dann ein, wenn ſich von der Schnitt-C^4 der Fläche Γ eine Kurve 3. O. (Fall I, b, 1 der Nr. 7 des § 2) oder zwei (I, a, 3; II, a, 2) oder ein (I, b, 2; II, b) Kegelſchnitt abſpalten; die ſich abſpaltenden Kurven ſtellen, jede für ſich, Kegelſchnittketten dar. Dieſe Fälle ſind bei Lie erwähnt [81]).

15. Bilder von Geradenketten auf Kurven 2. Klaſſe im Segreſchen Bild-R_4 und im Lieſchen Bild-R_3. Geradenketten werden dual zu Punktketten auf Kurven 2. O. definiert. Um das Segreſche Bild einer ſolchen Kette zu erhalten, haben wir ſie von $\mathfrak{G}$ aus durch eine R_3-Kette zu projizieren und das Erzeugnis dieſer R_3-Kette und der zu ihr konjugiert-komplexen R_3-Kette aufzuſuchen. Die R_3-Ketten beſtehen aus Berührungsflachen von Hyperkegeln vom Range 3. Bezieht man die beiden Mannigfaltigkeiten aller Berührungsflache dieſer Hyperkegel projektiv aufeinander, ſo wird das Erzeugnis eine von $\infty^{2\cdot 1}$

[81] Geſ. Abh. 1, Nr. III, IV, vgl. Anm. 59.

Ebenen beſchriebene M_3^4 [62]). Nach einem nun ſchon öfters ausgeführten Schluſſe wird daher das Bild der Geradenkette der reelle Zug einer ſolchen M_3^4, deren Ebenen übrigens als Bilder von Tangenten der Kurve 2. O. (charakteriſtiſche) Tangentialebenen der Bildfläche Γ dieſes Kegelſchnitts ſind.

Dieſe M_3^4 beſitzt eine Doppelfläche, Ort derjenigen Punkte, durch welche zwei Ebenen der M_3^4 laufen. Es handelt ſich um die Bildmannigfaltigkeit der Schnittpunkte zweier Geraden der Geradenkette, alſo um eine F_2^3 (vgl. Nr. 11, S 30).

Eine Ausartung der M_3^4 kann nur für ſolche auf Parabeln gelegene Geradenketten eintreten, welche die uneigentliche Gerade enthalten. Für eine ſolche Geradenkette zerfällt die M_3^4 in eine M_3^3 und den uneigentlichen R_3. In dieſem Falle zerfällt auch die Doppelfläche F_2^3 in eine eigentliche nicht-charakteriſtiſche Ebene und eine der abſoluten Kongruenz angehörende F^2.

Durch Schnitt der Bild-M_3^4 (bzw. M_3^3) mit dem Lieſchen-R_3 erhalten wir das

Lieſche Bild einer auf einer Kurve 2. Klaſſe gelegenen Geradenkette.

Die Ebenen der Bild-M_3^4 der Geradenkette ſchneiden den Lieſchen-R_3 in den Geraden einer Regelfläche 4. O. Dieſe hat diejenige Kurve 3. O. zur Doppelkurve, in der die Doppelfläche F_2^3 der M_3^4 den Lieſchen-R_3 ſchneidet. Da die F_2^3 Bild einer ternären Kette iſt, ergeben ſich hier zunächſt ſoviele Sonderfälle, als es verſchiedene Lagen der Bild-F_2^3 einer ternären Kette zum Lieſchen R_3 gibt. Wir behandeln nacheinander die möglichen Fälle. Dabei treten ſämtliche ſechs Arten von Regelflächen 4. Grades (III, IV, V, VI, VII, VIII) [63]) auf, die eine Kurve 3. O. als Doppelkurve haben.

Aus der projektiven Erzeugung der M_3^4 folgt die projektive Erzeugung dieſer Regelflächen 4. Grades: Sie ſind das Erzeugnis entſprechender Ebenen der projektiv aufeinander bezogenen Berührungsebenen der Minimalzylinder $\mathfrak{K}$, $\overline{\mathfrak{K}}$, in denen die Hyperzylinder k, $\overline{k}$ den Lieſchen-R_3 ſchneiden. Hier folgt ebenfalls, daß auf dieſe Weiſe Regelflächen 4. Grades, und zwar vom Typus III bis VIII erzeugt werden können.

---

[62] Die Ordnung beſtimmt ſich wie auf S. 39, Anm. 60.

[63] Bezeichnung nach R. Sturm, Liniengeometrie Bd. I, Leipzig, Teubner 1892, S. 54 ff.

I. Die Geradenkette enthält keine reelle Parallele zur X-Achſe.

Solche Geradenketten gibt es auf allen Kurven 2. Kl. Mit der Geradenkette iſt — wie bereits erwähnt — eine ternäre Punktkette verbunden, d. i. die Geſamtheit der Schnittpunkte zweier Geraden der Geradenkette. Je nach der Lage der ternären Punktkette zur Kette der reellen Parallelen zur X-Achſe ſind folgende Fälle zu unterſcheiden (wir bedienen uns der Klaſſifikation auf S. 32 ff.);

a) Fall I, a, 1: Regelfläche 4. Grades vom Typus III oder IV.
b) Fälle I, a, 2; II, a: Regelfläche 4. Grades vom Typus V oder VI.
c) Fälle I, b, 1; I, b, 3; II, b, 1: Regelfläche 4. Gr. vom Typus VII.
d) Fälle I, b, 2; II, b. 2: Regelfläche 4. Gr. vom Typus VIII.

II. Die Geradenkette enthält eine reelle Parallele zur X-Achſe.

Solche Geradenketten gibt es auf allen Kurven 2. Kl., die eine reelle Parallele zur X-Achſe enthalten. (Fälle I, a, 2; I, a, 3; I, b, 2; II, a, 1; II, a, 2; II, b der Klaſſifikation der Kegelſchnitte in Nr. 7.)

Es ſind folgende Fälle zu unterſcheiden:

a) Fälle I, a, 2; II, a: Regelfläche 3. Grades mit doppelter und einfacher Leitgerade oder Cayleyſche Regelfläche.
b) Fälle I, b, 1; I, b, 3; II, b, 1: Regelfläche 3. Grades mit doppelter und einfacher Leitgerade.
c) Fälle I, b, 2; II, b, 2: Cayleyſche Regelfläche.

III. Die Geradenkette enthält zwei reelle Parallelen zur X-Achſe.

Solche Geradenketten gibt es auf allen Kurven 2. Klaſſe, die zwei reelle Parallelen zur X-Achſe enthalten. (Fälle I, a, 3; I, b, 2; II, a, 2; II, b der Nr. 7.)

a) Fälle I, b, 1; I, b, 3; II, b, 1; I, b, 2; II, b, 2: Regulus allgemeiner Lage[64]).
b) Fall II, b, 3: Kurve 2. Klaſſe.

[64] Allgemeine Lage bedeutet hier: der Regulus läuft nicht durch die Punkte J, $\bar{J}$. Auszunehmen ſind alſo die Hyperboloide mit horizontalen Kreisſchnitten; dieſe ſind — wie bekannt — Bilder von Geradenketten im Geradenbüſchel durch einen komplexen Punkt (der als ausgearteter Klaſſenkegelſchnitt angeſehen werden kann).

Zweites Kapitel.

ABLEITUNG DER GERADENKUGELTRANSFORMATION AUS DER KOMPLEXEN GEOMETRIE.

§ 5. Begründung der Geradenkugeltransformation aus der Geometrie der komplexen Ebene.

16. **Die Euklidiſche Geradenkugeltransformation.** Zwei Räume, R_3^I und R_3^{II}, ſeien ſo aufeinander bezogen, daß die Punkte des erſten Raumes R_3^I auf die Geraden des Tangentenkomplexes einer Fläche 2. Klaſſe in R_3^{II} abgebildet werden, während umgekehrt den Punkten von R_3^{II} die Geraden eines regulären linearen Komplexes in R_3^I entſprechen. Dieſe Verwandtſchaft heißt, je nachdem es ſich um eine reguläre oder in eine Kurve 2. Kl. ausgeartete Fläche 2. Kl. handelt, Nichteuklidiſche oder Euklidiſche Geradenkugeltransformation.

Die Euklidiſche Geradenkugeltransformation hat S. Lie mit Hilfe ſeiner Repräſentation der komplexen Ebene als Bild einer Korrelation dieſer Ebene erhalten [65]).

Wie Lies erſte Begründung der Geradenkugeltransformation vermöge der Segreſchen Abbildung der komplexen Ebene erhalten werden kann, iſt von E. A. Weiß [66]) gezeigt worden. Wir bringen zunächſt dieſe Begründung, jedoch, mit Rückſicht auf die ſpäter folgende Ableitung der Nichteuklidiſchen Geradenkugeltransformation, in etwas veränderter Form.

Im Segreſchen Bild-R_4 nehmen wir einen Raum (R_3^{II}) willkürlich an. Der R_3^{II} iſt das Bild einer dreidimenſionalen Punktkette Γ_2, welche die uneigentliche Gerade u enthält. Unterwerfen wir Γ_2 einer Korrelation, von der wir nur verlangen, daß ſie einen uneigentlichen Punkt o [67]) der dreidimenſionalen Punktkette, der nicht mit dem Scheitel q der dreidimenſionalen Punktkette Γ_2 zuſammenfällt, in die uneigentliche Gerade u transformiert, ſo geht die dreidimenſionale Punktkette Γ_2 in eine dreidimenſionale Geradenkette Π_2 über, welche die uneigentliche Gerade enthält. Bei dieſer Korrelation wird insbeſondere dem Punkte q eine

[65] Siehe S. 5, Anm. 3.

[66] E. A. Weiß. S. Lies erſte Begründung der Geraden-Kugel-Transformation, Math. Ann. 108, 1933.

[67] Es iſt übrigens, zur Ableitung der Euklidiſchen G.-K.-T. nicht notwendig, daß der Punkt o uneigentlich iſt. Im Falle, daß o eigentlich iſt, erhält man in R_3^{II} den Treffgeradenkomplex eines eigentlichen in einer Horizontalebene gelegenen Kegelſchnittes.

eigentliche Gerade g, der Verbindungslinie oq — d. i. der uneigentlichen Geraden — daher der Schnittpunkt ug = p zugeordnet.

Wir wählen nun eine dreidimensionale Punktkette Γ_1 mit dem Scheitel p, die die uneigentliche Gerade u, jedoch nicht die Gerade g enthält. Der dreidimensionalen Punktkette Γ_1 entspricht im Segreschen R_4 ein eigentlicher Raum (R_3^I); er wird von der der dreidimensionalen Geradenkette Γ_2 entsprechenden Ebenenmannigfaltigkeit in einem linearen Komplex geschnitten. (Vgl. Nr. 13, S. 37, Fall II, c.)

Die dreidimensionale Punktkette Γ_1, welche ja p als Scheitel hat, ist durch die Korrelation aus einer dreidimensionalen Geradenkette II_1 entstanden, welche die uneigentliche Gerade als Trägergerade hat und den Punkt q (als Geradenort) nicht enthält. Die der Geradenkette II_1 entsprechende Ebenenmannigfaltigkeit schneidet den Ausgangsraum R_3^{II} (nach Nr. 13, S. 37, Fall III, a) in dem Treffgeradenkomplex eines uneigentlichen Kegelschnitts.

So induziert die Korrelation der komplexen Ebene im Segreschen Bild-R_4 die euklidische Geradenkugeltransformation.

17. Bild von Punkt- und Geradenhyperkegelschnitt im Segreschen-R_4. Aus der Zusammenstellung der Nr. 13 des § 3 ist ersichtlich, daß man als Liesches Bild einer dreidimensionalen Geradenkette niemals den Tangentenkomplex einer regulären Fläche 2. O. erhalten kann. Eine dreidimensionale Kette läßt sich aber als Ausartung eines Hyperkegelschnitts[68]) auffassen. Wir werden zeigen, wie man unter Zuhülfenahme eines solchen Hyperkegelschnitts die Nichteuklidische Geradenkugeltransformation ableiten kann. Als Vorbereitung haben wir zunächst die Bildmannigfaltigkeiten von Punkt- und Geradenhyperkegelschnitten im Segreschen-R_4 zu untersuchen.

Bild eines Punkthyperkegelschnitts. Da bei der Segreschen Abbildung die uneigentliche Gerade der komplexen Ebene ausgezeichnet ist, werden die einem Punkthyperkegelschnitt entsprechenden Bildmannigfaltigkeiten verschieden sein, je nachdem der Punkthyperkegelschnitt die uneigentliche Gerade zur Tangente hat oder nicht.

---

[68]) Eine involutorische Antikorrelation (Antipolarität) $\Sigma\, a_{ik}\, x^i\, \bar{y}_k = 0$ $a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ hat entweder keinen Ruhepunkt, oder sie hat deren ∞^3; im letzten Falle heißt die Mannigfaltigkeit der Ruhepunkte Hyperkegelschnitt.

Wir ſetzen voraus, daß der Punkthyperkegelſchnitt mit der uneigentlichen Geraden eine binäre Punktkette II gemeinſam hat. Die durch die Punkte von II hindurchlaufenden (∞^3) Geraden ſchneiden den Hyperkegelſchnitt in (∞^3) binären Punktketten, die je einen uneigentlichen Punkt enthalten, alſo in ∞^3 „Normalketten".

Die Normalgleichung eines Hyperkegelſchnitts dieſer Art lautet:

$$x_1 \bar{x}_1 - x_2 \bar{x}_2 + x_3 \bar{x}_3 = 0$$

Daraus folgt vermöge der Segreſchen Abbildung:

$$-x^2 - y^2 + z^2 + p^2 = 1$$

Alſo: Die Bildmannigfaltigkeit eines Punkthyperkegelſchnitts, der die uneigentliche Gerade in einer binären Kette ſchneidet, iſt im Segreſchen Bild-R_4 der reelle Zug einer reellen regulären, durch die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ laufenden M_3^2 mit reellen Geraden. (Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_1$.)

Den uneigentlichen R_3 des Bild-R_4 ſchneidet die M_3^2 in einer reellen regulären geradlinigen Fläche 2. O. Derjenige Regulus der F^2, dem die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht angehören, beſteht ganz aus Geraden der abſoluten Kongruenz, und dieſe ſind — ſoweit ſie reell ſind — Bilder der Punkte der Punktkette II, in der der Hyperkegelſchnitt die uneigentliche Gerade der komplexen Ebene ſchneidet. Eine jede durch eine ſolche reelle Gerade hindurchlaufende charakteriſtiſche Ebene — Bild einer der ∞^3 durch die Punkte von II laufenden Geraden — ſchneidet M_3^2 in einer weiteren reellen Geraden. Somit folgt:

Die ∞^3 reellen Geraden der Bild-M_3^2 eines Hyperkegelſchnittes allgemeiner Lage ſind die Bilder der ∞^3 Normalketten dieſes Hyperkegelſchnitts.

Falls der Punkthyperkegelſchnitt die uneigentliche Gerade der komplexen Ebene berührt, ergibt ſich als Bildmannigfaltigkeit der reelle Zug einer ſingulären M_3^2 (Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_2$).

Dieſer Fall wird uns aber nicht intereſſieren.

Bild eines Geradenhyperkegelſchnittes. Wir wollen nun die Bildmannigfaltigkeit eines Geradenhyperkegelſchnitts unterſuchen. Es ſind zwei Fälle möglich: Der Geradenhyperkegelſchnitt kann die uneigentliche Gerade enthalten oder nicht. Wir gehen zunächſt auf den letzten Fall ein.

Einen Geradenhyperkegelſchnitt erhalten wir dadurch, daß wir auf einen Punkthyperkegelſchnitt eine (komplexe) Korrelation ausüben. Das Bild eines Geradenhyperkegelſchnitts entſteht daher dadurch, daß wir auf das Bild des Punkthyperkegelſchnitts die Bildverwandtſchaft der Korrelation ausüben. Nun kann eine durch die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ laufende M_3^2 erzeugt werden, indem man die Ebenen des Bündels $\mathfrak{G}$ projektiv auf die R_3 des R_3-Bündels $\overline{\mathfrak{G}}$ bezieht und entſprechende Elemente zum Schnitt bringt. Einer Korrelation der komplexen Ebene entſpricht aber in der Segreſchen Abbildung eine reelle Verwandtſchaft des Bild-R_4[69]), die erhalten wird, wenn man die Ebenen des Ebenenbündels durch $\mathfrak{G}$ projektiv auf die R_3 des R_3-Bündels durch $\mathfrak{G}$, und die Ebenen des Ebenenbündels durch $\overline{\mathfrak{G}}$ durch die konjugiert-komplexe Projektivität auf die R_3 des R_3-Bündels durch $\overline{\mathfrak{G}}$ bezieht: Ein Punkt beſtimmt aus jedem Bündel eine Ebene und die den beiden Ebenen zugeordneten R_3 ſchneiden ſich in der dem vorgegebenen Punkte entſprechenden charakteriſtiſchen Ebene. Infolgedeſſen ergibt ſich folgende Konſtruktion der Bildmannigfaltigkeit eines Geradenhyperkegelſchnitts:

Man beziehe die R_3 des R_3-Bündels $\mathfrak{G}$ projektiv auf die R_3-Büſchel (Ebenen) des Bündels $\overline{\mathfrak{G}}$, und bringe entſprechende R_3 der beiden Bündel zum Schnitt. Die reellen Schnittebenen ſind dann diejenigen (charakteriſtiſchen) Ebenen, die Bilder der Geraden des Geradenhyperkegelſchnitts ſind. (Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_1$).

Wir wollen noch feſtſtellen, wie ein R_3 eine ſolche Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_1$ ſchneidet. Die R_3 des R_3-Bündels durch die Gerade $\mathfrak{G}$ ſchneiden den R_3 in Ebenen eines Ebenenbündels J (J ſei der Schnittpunkt der Geraden $\mathfrak{G}$ mit dem R_3), ebenſo ſchneiden die R_3 des R_3-Bündels durch die Gerade $\overline{\mathfrak{G}}$ in Ebenen eines Ebenenbündels $\overline{J}$. Durch die korrelative Beziehung zwiſchen den R_3-Bündeln $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$ werden auch die Ebenenbündel J und $\overline{J}$ korrelativ aufeinander bezogen, und die Schnittgeraden entſprechender Ebenen bilden ſomit einen Hirſtſchen Komplex[70]). Die Singularitätenfläche des

[69] Die Bildverwandtſchaft einer Korrelation ordnet dadurch jedem eigentlichen Punkte des R_4 (evt. mit Ausnahme des Bildpunktes desjenigen Punktes, dem die uneigentliche Gerade zugeordnet wird) eine charakteriſtiſche Ebene zu.

[70] Charakteriſtik [(11)(11)2].

Komplexes zerfällt außer in eine F^2 in diejenigen beiden Ebenen der Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_1$, die (durch die Kongruenzgerade $\mathfrak{P} = JJ$ hindurchgehen und) ganz innerhalb unseres R_3 verlaufen. Ausartungen dieses Komplexes können nicht auftreten.

Wir haben nun noch den für uns wichtigen Fall zu betrachten, daß die uneigentliche Gerade dem Hyperkegelschnitt angehört.

Dem entspricht im Bild-R_4, daß das R_3-Büschel im Bündel $\overline{\mathfrak{G}}$, welches dem uneigentlichen R_3 als R_3 des Bündels $\mathfrak{G}$ zugeordnet ist, diesen R_3 enthält (Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_2$).

Ein R_3 allgemeiner Lage schneidet diese Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_2$ wie im allgemeinen Falle in einem Hirstschen Komplex; jedoch gibt es ∞^2 R_3, die $\mathfrak{E}_2$ in einem linearen Komplex (der Hirstsche Komplex zerfällt in einen regulären linearen Komplex und den Treffgeradenkomplex der absoluten Geraden des R_3) schneidet, und zwar läuft durch jede Gerade der absoluten Kongruenz ein einziger dieser R_3. Ausgenommen ist nur die Gerade, die dem uneigentlichen Berührungspunkte des Hyperkegelschnitts entspricht [71]).

18. Die Nichteuklidische Geradenkugeltransformation. Die Grundlage der Nichteuklidischen Geraden-Kugeltransformation ist die Abbildung der Punkte eines Raumes R_3^I auf die Geraden einer regulären M_3^2 des R_4. Bei dieser Abbildung wird im Raume R_3^I ein regulärer linearer Komplex ausgezeichnet, dessen Geraden ihrerseits die Bilder der auf M_3^2 gelegenen Punkte sind. Durch Projektion der M_3^2 von einem nicht auf ihr gelegenen Punkte aus auf einen Raum R_3^{II} entsteht aus der Geradenmannigfaltigkeit der M_3^2 der Tangentenkomplex einer Fläche 2. O.

Wir zeigen im folgenden, wie sich diese aus der Liniengeometrie wohlbekannte Abbildung als Bild einer Korrelation der komplexen Ebene ergibt.

Die Punkte eines Punkthyperkegelschnitts allgemeiner Lage der komplexen Ebene bilden sich auf die Punkte einer Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_1$

[71] Abgesehen vom uneigentlichen Berührungspunkte des Hyperkegelschnittes können von jedem Punkte der uneigentlichen Geraden ∞^1 Tangenten an den Hyperkegelschnitt gezogen werden. Diese bilden eine binäre Kette, der auch die uneigentliche Gerade angehört. Eine solche Kette wird also im R_4 auf einer R_3 abgebildet und für einen solchen R_3 zerfällt der Hirstsche Komplex.

ab, alſo auf die reellen Punkte einer M_3^2 mit reellen Geraden (vgl. S. 45). Unterwerfen wir den Punkthyperkegelſchnitt einer Korrelation, ſo gehen die Punkte des Punkthyperkegelſchnitts in die Geraden eines Geradenhyperkegelſchnitts über, und die Bildverwandtſchaft der komplexen Korrelation führt dementſprechend im R_4 die Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_1$ in eine Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_1$ oder $\mathfrak{E}_2$ über. Wir hatten nun bereits (ſiehe S. 47) geſehen, daß nur im Falle einer Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_2$ durch Schnitt mit einem Raume R_3 ein linearer Komplex gewonnen werden kann. Wir müſſen daher fordern, daß die Bildtransformation die Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{P}_1$ in eine Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_2$ transformiere. Für die ebene Korrelation ergibt ſich daher die Forderung, daß ſie den Punkthyperkegelſchnitt in einen Geradenhyperkegelſchnitt transformiere, der die uneigentliche Gerade enthält.

Aber dieſe Bedingung genügt noch nicht zur Charakteriſierung der ebenen Korrelation. Würden wir nämlich im R_4 als Schnittraum R_3^I einen beliebigen unter den ∞^2 Räumen wählen, die die Ebenenmannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_2$ in einem linearen Komplex ſchneiden, ſo wäre wohl erreicht, daß den Punkten der Bild-M_3^2 durch die Bildverwandtſchaft die Geraden des linearen Komplexes in R_3^I zugeordnet würden, aber umgekehrt würden den Punkten von R_3^I im allgemeinen nicht die Geraden der M_3^2 entſprechen (ſondern Kreiſe).

In der Tat: Ein ſolcher Raum R_3^I, der die Bildmannigkeit $\mathfrak{E}_2$ in einem linearen Komplex ſchneidet, iſt das Bild einer als Punktort aufgefaßten Geradenkette Γ, welche die uneigentliche Gerade enthält [72]). Die zur vorgegebenen Korrelation inverſe Korrelation transformiert die Geradenkette Γ in eine Punktkette allgemeiner Lage, deren Geraden den Punkthyperkegelſchnitt in binären Ketten ſchneiden, die im allgemeinen Falle keine Normalketten ſein werden und daher auf nicht geradlinige Kreiſe von M_3^2 abgebildet werden. Sollen anſtelle dieſer Kreiſe Geraden entſtehen, ſo müſſen die Geraden der Punktkette in Normalketten ſchneiden, die Punktkette muß mit der auf der uneigentlichen Geraden gelegenen Punktkette II des Punkthyperkegelſchnitts identiſch ſein. Unſere Geradenkette Γ muß daher bei unſerer Korrelation aus der uneigentlichen binären Kette II des Punkthyperkegelſchnitts entſtanden ſein. Dies

[72] Vgl. die Anm. auf S. 47.

iſt dann und nur dann der Fall, wenn die Korrelation die uneigentliche Gerade u in einen uneigentlichen Punkt, p, transformiert.

Die beiden der Korrelation aufzuerlegenden Bedingungen laſſen ſich in eine einzige zuſammenfaſſen: Die Korrelation muß einen uneigentlichen Punkt o des Punkthyperkegelſchnitts in die uneigentliche Gerade u transformieren. (Vgl. S. 43.)

So ſind wir zu folgendem Endreſultat geführt worden:

Um im Segreſchen-R_4 die Abbildung der Punkte eines Raumes R_3^I auf die Geraden einer M_3^2 und gleichzeitig die Abbildung der Punkte der M_3^2 auf die Geraden eines linearen Komplexes in R_3^I als Bild einer Korrelation der komplexen Ebene zu erhalten, hat man in der komplexen Ebene 1. einen regulären Punkthyperkegelſchnitt (M_3^2) beliebig, jedoch ſo, daß er die uneigentliche Gerade in einer Punktkette ſchneidet, 2. eine Korrelation ſo anzunehmen, daß ſie einen uneigentlichen Punkt des Punkthyperkegelſchnitts in die uneigentliche Gerade transformiert. Die auf der uneigentlichen Geraden gelegene Punktkette des Punkthyperkegelſchnitts geht dann durch die Korrelation in eine Geradenkette über, die die uneigentliche Gerade enthält (R_3^I).

Damit haben wir im weſentlichen unſere Abſicht erreicht; jedoch bleibt noch eine Lücke zu beſeitigen. Den eigentlichen Punkten einer Geraden der M_3^2 werden durch die Bildverwandtſchaft der Korrelation die Geraden eines Geradenbüſchels im Raume R_3^I zugeordnet; wir erhalten jedoch dieſes Büſchel nicht vollſtändig; zu einem binären Gebiet wird es erſt, wenn man die Schnittgerade der Ebene des Büſchels mit der durch den Scheitel des Büſchels laufenden charakteriſtiſchen Ebene des Raumes R_3^I hinzufügt. Treffen wir die Feſtſetzung:

Dem uneigentlichen Punkte einer eigentlichen Geraden der M_3^2 ſoll die Gerade zugeordnet ſein, in der die Ebene des der Geraden entſprechenden Geradenbüſchels die durch den Scheitel des Geradenbüſchels laufende charakteriſtiſche Ebene ſchneidet,

ſo haben wir damit (auch von unſerem Standpunkte aus) erreicht, daß die Punkte der M_3^2 lückenlos, umkehrbar ein-

deutig auf die Geraden des linearen Komplexes im Raum R_3^{II} bezogen ſind.

Projizieren wir M_3^2 von einem ihr nicht angehörigen Punkte auf R_3^{II}, ſo ſind die Räume R_3^{I} und R_3^{II} in der gewünſchten Weiſe aufeinander bezogen.

Hiermit ſind wir dann bei der bekannten Ableitung der Nichteuklidiſchen Geradenkugeltransformation angelangt, die wir daher in ihren Einzelheiten nicht weiter zu verfolgen brauchen.

19. **Zuſammenhang zwiſchen den beiden verſchiedenen Arten der Begründung der Geraden-Kugel-Transformation.** Unſere Ableitung der N. E. G. K. T. als Bild einer Korrelation der komplexen Ebene deckt nun auch den Zuſammenhang auf, der zwiſchen Lies erſter Begründung der G. K. T. und der ſpäteren Art der Begründung beſteht, die von der liniengeometriſchen Abbildung der Geraden eines linearen Komplexes im R_3 auf die Punkte einer M_3^2 im R_4 ausgeht. Denn es hat ſich gezeigt, daß eben dieſe Abbildung gewonnen wird, wenn man einen Punkthyperkegelſchnitt der komplexen Ebene einer geeignet gewählten Korrelation unterwirft und das Bild dieſer Korrelation im R_4 unterſucht. Daß S. Lie dieſen Zuſammenhang nicht erkannt und ſomit die Möglichkeit einer N. E. G. K. T. zunächſt vereint hat, kann — wie wir ſchon in der Einleitung bemerkt haben — nur dadurch erklärt werden, daß ihm die notwendigen Vorausſetzungen aus der komplexen Geometrie, vor allem die Begriffe Hyperkegelſchnitt und Kette, fremd waren. Unſere Unterſuchungen haben gezeigt, daß die Lieſche Begründung keineswegs, wie ihr Entdecker ſpäterhin meinte, eine rein „zufällige“ war, ſondern daß ſie innerhalb der komplexen Geometrie eine ſyſtematiſche Stellung einnimmt.

§ 6. Konſtruktion der Nichteuklidiſchen Geradenkugeltransformation.

20. **Konſtruktion der Abbildung: Punkte eines R_3 — Geraden der M_3^2.** Wie die Lieſche Begründung der Euklidiſchen Geradenkugeltransformation zu einer Konſtruktion der Euklidiſchen G.-K.-T. führt, wie ſie z. B. von Liebmann angegeben worden iſt, ſo ergibt ſich als Folgerung aus unſerer Begründung der Nichteuklidiſchen G.-K.-T. eine neue Konſtruktion der N. E. G. K. T.[73]), die die Liebmannſche Konſtruktion als Ausartung liefert.

[73] Die von Liebmann angegebene Konſtruktion der N. E. G. K. T. beſchränkt ſich darauf, nach Ausführung der Konſtruktion der E.G.K.T.

Ein Punkthyperkegelſchnitt und eine Korrelation der komplexen Ebene ſeien den Forderungen des letzten Paragraphen entſprechend vorgegeben. Der Korrelation entſpricht eine reelle Verwandtſchaft des Bild-R_4, die ſich ergibt, wenn man zugeordnete Punkte und Geraden der Ebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ aus durch Ebenen und R_3 projiziert und mit den konjugiert-komplexen Ebenen und R_3 (durch $\overline{\mathfrak{G}}$) zum Schnitt bringt. Die Bildverwandtſchaft wird alſo durch eine Korrelation (Ebene — R_3) im Bündel $\mathfrak{G}$ beſtimmt. Wir bringen nun die Ebenen- und R_3-Bündel durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ einerſeits mit dem Raume R_3^I, anderſeits mit der M_3^2 zum Schnitt.

Die beiden R_3-Bündel $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ ſchneiden R_3^I in zwei Ebenenbündeln J, $\overline{J}$. Die Ebenen des Ebenenbündels $\mathfrak{G}$ ($\overline{\mathfrak{G}}$) ſchneiden M_3^2 außer in der Geraden $\mathfrak{G}$ ($\overline{\mathfrak{G}}$), die ja der M_3^2 angehört, in einer weiteren (Treff)geraden von $\mathfrak{G}$ ($\overline{\mathfrak{G}}$). Dabei iſt die Geſamtheit der auf M_3^2 gelegenen Treffgeraden [74]) von $\mathfrak{G}$ zunächſt perſpektiv auf das Ebenenbündel durch $\mathfrak{G}$ und damit projektiv auf das Ebenenbündel durch J bezogen. Das Ebenenbündel $\overline{J}$ wird ebenſo, durch die konjugiert-komplexe Projektivität, auf die Geſamtheit der M_3^2 angehörigen Treffgeraden der Geraden $\overline{\mathfrak{G}}$ bezogen. Den Geraden im Bündel J $\overline{(J)}$ entſprechen dabei die Gerade $\mathfrak{G}$ ($\overline{\mathfrak{G}}$) enthaltende reguläre „orientierte“ Flächen 2. O. auf M_3^2, die von den R_3 des R_3-Bündels $\mathfrak{G}$ ($\overline{\mathfrak{G}}$) aus der M_3^2 ausgeſchnitten werden:

Gerade des Bündels J — Verbindungsebene mit $\mathfrak{G}$ — Korrelativ zugeordneter R_3 — Orientierte Fläche auf M_3^2.

---

den Treffgeradenkomplex eines (abſoluten) Kegelſchnitts durch eine Punkttransformation in den Tangentenkomplex einer F^2 überzuführen, was bekanntlich nur im allgemeinen möglich iſt. — Von „Konſtruktion“ kann im Folgenden nur in demſelben Sinne die Rede ſein wie bei Liebmann in ſeinen Ausführungen über den Euklidiſchen Fall. Hier wird vielmehr, ebenſo wie bei Liebmann, geometriſch (durch rein projektive Zuordnungen) die Möglichkeit der Abbildung nachgewieſen.

Eine wirkliche Durchführung der Konſtruktion in dem Sinne, wie ſie im Euklidiſchen Falle H. Beck: Konſtruktion der Geraden-Kugel-Transformation, Monatshefte Math. Phys. 39, 1932, gegeben hat, bietet keine weſentlichen Schwierigkeiten, ſoll aber, da ſie mit dem hier gewählten Ausgangspunkt nichts mehr zu tun hat, einer beſonderen Darſtellung vorbehalten bleiben.

[74]) Dieſe Geſamtheit bildet ein ternäres Gebiet.

Da die Korrelation der komplexen Ebene den komplexen Punkt p, Bild der abſoluten Geraden $\mathfrak{P} = J\overline{J}$ von R_3^I, in die uneigentliche Gerade u der komplexen Ebene transformiert, wird denjenigen beiden Ebenen der Bündel $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$, die die abſolute Gerade $\mathfrak{P}$ projizieren, in den R_3-Bündeln beide Male derſelbe R_3: der von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ aufgeſpannte uneigentliche R_3 zugeordnet. Dieſer ſchneidet M_3^2 in ihrer abſoluten F^2. Der gemeinſamen Geraden der Bündel J, $\overline{J}$ im Raume R_3^I entſpricht ſomit auf M_3^2 ſowohl in der Treffgeradenmannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$ als auch $\overline{\mathfrak{G}}$ dieſelbe orientierte F^2, die im uneigentlichen R_3 des Bild-R_4 liegende F^2 der M_3^2, aufgefaßt als Ort abſoluter Geraden.

Durch einen reellen Punkt X von R_3^I läuft nun eine Gerade des Bündels J und die zu dieſer konjugiert-komplexe Gerade des Bündels $\overline{J}$. Dieſen beiden Geraden entſprechen zwei konjugiert komplexe Ebenen durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$. Ihnen werden durch die Bildverwandtſchaft der komplexen Korrelation zwei R_3 durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ zugeordnet, die ſich in einer reellen (charakteriſtiſchen) Ebene ſchneiden. Dieſe charakteriſtiſche Ebene ſchneidet ſchließlich M_3^2 außer in einer abſoluten Geraden der uneigentlichen F^2 noch in einer weiteren eigentlichen reellen Geraden der M_3^2; es iſt die Gerade, die dem Punkte X in unſerer Punkt-Geradenverwandtſchaft zuzuordnen iſt.

Umgekehrt läuft durch einen (reellen) Punkt Y der M_3^2 je eine der M_3^2 angehörigen Treffgeraden von $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$; dieſe werden von zwei (konjugiert-komplexen) Ebenen durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ ausgeſchnitten. In der Bildverwandtſchaft der komplexen Korrelation werden dieſen Ebenen zwei (ebenfalls konjugiert-komplexe) R_3 durch $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ zugeordnet, die R_3^I in zwei (konjugiert-komplexen) Ebenen der Ebenenbündel J, $\overline{J}$ ſchneiden. Dieſe Ebenen beſtimmen eine (reelle) Schnittgerade, die — wie wir früher gezeigt haben — einem linearen Komplex angehört.

Zerſtören wir nun noch den konjugiert-komplexen Zuſammenhang zwiſchen den Ebenenbündeln J, $\overline{J}$ einerſeits und den Treffgeraden von $\mathfrak{G}$ und denen von $\overline{\mathfrak{G}}$ anderſeits, dadurch, daß wir im Raume R_3^I eine komplexe Projektivität ausführen, und erweitern wir die Konſtruktion ins komplexe Gebiet, ſo ergibt ſich die folgende

Konſtruktion der Abbildung: Punkte eines R_3 — Geraden der M_3^2:

Im Raume R_3^I ſeien zwei Ebenenbündel J, J', auf der M_3^2 zwei windſchiefe Geraden $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ gegeben. Zwiſchen den Ebenen des Ebenenbündels J und den der M_3^2 angehörigen Treffgeraden der Geraden $\mathfrak{G}$ ſei eine projektive Beziehung hergeſtellt, ebenſo zwiſchen den Ebenen des Ebenenbündels J' und den Treffgeraden der Geraden $\mathfrak{G}'$. Dieſen beiden Zuordnungen ſei nur die Beſchränkung auferlegt, daß der gemeinſamen Geraden $\mathfrak{P} = J\,J'$ dieſelbe orientierte F^2 — nämlich die durch $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ beſtimmte — entſpricht. Dann erfolgt die verlangte Abbildung durch folgende Konſtruktion:

Punkt X von R_3^I — Verbindungsgeraden von X mit J, J' — orientierte F^2 durch $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$ — gemeinſame Gerade dieſer F^2 [75]).

21. **Die durch die Projektion der M_3^2 hervorgerufene Einzweideutigkeit der Verwandtſchaft.** Um von der beſprochenen Ableitung zu einer möglichſt einfachen Konſtruktion der N. E. G. K. T. zwiſchen R_3^I und einem zweiten Raume R_3^{II} zu gelangen, erweiſt es ſich als zweckmäßig, als „Kugelraum" R_3^{II}, d. i. als Raum, in den M_3^2 projiziert wird, den von den Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ aufgeſpannten R_3 des R_4 zu wählen, und von dem Polpunkte O dieſes R_3 inbezug auf M_3^2 zu projizieren. Die Geraden der M_3^2 gehen dann in die Geraden des Tangentenkomplexes der im Raume R_3^{II} liegenden Fläche 2. O. der M_3^2: O, über.

Da eine jede Ebene, die eine Gerade der M_3^2 enthält, die M_3^2 auch noch in einer weiteren Geraden ſchneidet, wird der im Raume R_3^{II} liegende Tangentenkomplex doppelt überdeckt. Infolgedeſſen entſprechen einer Geraden des Tangentenkomplexes im allgemeinen zwei Geraden der M_3^2, denen in unſerer Verwandtſchaft zwei Punkte des Raumes R_3^{II} zugeordnet werden.

Bei der Projektion der Geraden der M_3^2 auf den R_3^{II} gehen insbeſondere auch die Treffgeradenmannigfaltigkeiten der Geraden $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) über in die Mannigfaltigkeit der die Erzeugende $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) der Fläche O treffenden Tangenten. Dieſe erfüllen eine ſinguläre lineare Kongruenz mit der Leitgeraden $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$).

Einer Geraden dieſer Kongruenz, alſo einer Trefftangente $\mathfrak{T}$ der Erzeugenden $\mathfrak{G}$ entſpricht [76]) zunächſt ein Paar von Geraden der M_3^2, ein

---

[75] Wegen der Abbildung der Punkte von $\mathfrak{P}$ auf Geraden der gemeinſamen F^2 vgl. H. Beck, Die beiden Geradenkugeltransformationen von Sophus Lie, Münchener Akademieber. 1917, S. 53.

[76] Einer (Treff-)erzeugenden der Fläche O wird nur eine einzige Ebene, eine Ebene durch die Gerade $\mathfrak{P} = JJ'$ zugeordnet.

Paar von Ebenen, die diese Geraden mit $\mathfrak{G}$ verbinden, und somit ein zugeordnetes Ebenenpaar im Bündel J des Raumes R_3^I. Wir wollen die gegenseitige Lage der Ebenen des Ebenenpaares untersuchen.

Die $\mathfrak{T}$ von O aus projizierende Ebene E schneidet M_3^2 in zwei Geraden $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, die die Gerade $\mathfrak{G}$ im Schnittpunkte R von $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{G}$ treffen. Diese Geraden $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ bilden zusammen mit $\mathfrak{T}$ und der Verbindungslinie $\mathfrak{S} = RO$ zwei harmonische Geradenpaare. Infolgedessen bilden auch die vier Verbindungsebenen der Geraden $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$; $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S}$ mit der Geraden $\mathfrak{G}$ ein harmonisches Ebenenquadrupel. Diesem entspricht in der durch die Bildverwandtschaft der komplexen Ebene vermittelten projektiven Zuordnung ein harmonisches R_3-Quadrupel durch die Gerade $\mathfrak{G}$, das wiederum den Raum R_3^I in einem harmonischen Ebenenquadrupel schneidet.

Somit sind wir imstande, die Lage des der Tangente $\mathfrak{T}$ im R_3^I entsprechenden Ebenenpaares T_1, T_2 anzugeben: Der im R_4 den Punkt O von $\mathfrak{G}$ aus projizierenden Verbindungsebene $\mathfrak{G}\mathfrak{S}$ wird im Ebenenbündel J eine ausgezeichnete Ebene G zugeordnet; der Verbindungsebene $\mathfrak{G}\mathfrak{T}$ eine durch die Gerade $\mathfrak{P} = JJ'$ laufende Ebene des Raumes R_3^I.

Ebenso ergibt sich, daß im Bündel J' eine Ebene G' ausgezeichnet ist, die der den Punkt O von $\mathfrak{G}'$ aus projizierenden Ebene zugeordnet ist, und es folgt:

Die einer Trefftangente $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}'$) von $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) im Bündel J (J') zugeordneten Ebenen T_1, T_2 (T_1', T_2') liegen harmonisch zu der ausgezeichneten Ebene G (G') des Bündels und zu der Verbindungsebene ihrer Schnittgeraden mit der Geraden $\mathfrak{P}$.

Die Ebenen G, G' des Raumes R_3^I schneiden sich in einer Geraden $\mathfrak{Q}$; die Geraden $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ sind die Leitgeraden der im linearen Komplex ausgezeichneten regulären linearen Kongruenz, deren Geraden den Tangentialebenen der Fläche O (als Ort von Tangenten der Fläche) zugeordnet werden [77]).

22. **Konstruktion der N. E. G. K. T.** Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich die folgende Konstruktion der N. E. G. K. T. [78]).

[77] Vgl. H. Beck, a. a. O. S. 56.
[78] Siehe S. 50, Anm. 73.

Im Raume R_3^I ſeien zwei Ebenenbündel J, J'; im Raume R_3^{II} zwei ſinguläre lineare Kongruenzen mit den Leitgeraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ vorgegeben, von denen wir vorausſetzen wollen, daß ſie einen Regulus von Kongruenzgeraden gemeinſam haben. Die mit dem Regulus verbundene Fläche 2. O. heiße „abſolute Fläche", die Geraden des Regulus mögen als Erzeugende der zweiten Schar, die Geraden des polaren Regulus, dem auch die Geraden $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ angehören, als Erzeugende der erſten Schar der abſoluten Fläche bezeichnet werden.

Zwiſchen den Ebenen des Ebenenbündels J im Raume R_3^I und den Geraden der Kongruenz $\mathfrak{G}$, und ebenſo zwiſchen den Ebenen des Ebenenbündels J' und den Geraden der Kongruenz $\mathfrak{G}'$ ſei nun eine Zuordnung hergeſtellt, und zwar in der folgenden Weiſe:

Wir zeichnen im Bündel J (J') eine Ebene G (G') aus, die die Gerade $\mathfrak{P} = JJ'$ nicht enthält. Durch die Ebene G (G') und die Gerade $\mathfrak{P}$ wird im Bündel eine involutoriſche Kollineation definiert, welche die Ebenen des Bündels zu Paaren zuſammenfaßt. Dann beziehen wir die Ebenenpaare des Bündels J (J') auf die Geraden der Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) projektiv in der Weiſe, daß die $\infty^{2\cdot 1}$ die Ebene G (G') enthaltenden Ebenenbüſchel projekiv auf die Geradenbüſchel der linearen Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) bezogen werden. Bei dieſer Zuordnung entſprechen den Ebenenbüſcheln allgemeiner Lage des Bündels J (J') (Geraden als Orte von Ebenen des Bündels) Reguli aus Kongruenzgeraden der linearen Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$). Den beiden Zuordnungen ſei jedoch die Beſchränkung auferlegt, daß dem gemeinſamen Ebenenbüſchel der Ebenenbündel J, J' (deſſen Trägergerade die Gerade $\mathfrak{P} = JJ'$ iſt), ein und derſelbe, nämlich der den Kongruenzen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ gemeinſame Regulus, (der Regulus zweiter Art der abſoluten Fläche) zugeordnet wird.

Ebene allgemeiner Lage: Einer Ebene allgemeiner Lage des Bündels J (J') entſpricht in der Zuordnung eine Gerade der Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$). Dieſer Geraden entſpricht aber umgekehrt ein Ebenenpaar des

Ebenenbündels J (J'). Das Ebenenpaar hat eine durch J und in G verlaufende Schnittgerade $\mathfrak{A}$ und liegt harmonisch zu dem Paar der Ebenen $G = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{P}$. Dabei entspricht $\mathfrak{A}$ als Ebenenort dem Geradenbüschel, dem die abgebildete Kongruenzgerade angehört.

Ebenenbüschel allgemeiner Lage: Einem Ebenenbüschel allgemeiner Lage des Bündels J (J') entspricht in dieser Zuordnung, wie bereits gesagt, ein Regulus der Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$). Die so entstehenden ∞^2 Reguli („sphärische Reguli")[79] sind gekennzeichnet als diejenigen Reguli der Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$), die eine Erzeugende 2. Art der absoluten Fläche enthalten. Diese Erzeugende 2. Art bildet zusammen mit der Geraden $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$) das Blatt, das die mit dem Regulus verbundene „orientierte" Fläche 2. Ordnung mit der „orientierten" absoluten Fläche gemeinsam hat. — Umgekehrt entspricht einem Regulus der Kongruenz $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}'$), dessen zugehörige Fläche 2. Ordnung mit der absoluten Fläche in Oskulation liegt, ein Paar von Geraden (als Ebenenörter) im Bündel J (J'). Dieses Geradenpaar liegt mit der Geraden $\mathfrak{P}$ in einer Ebene, und ist harmonisch zu dem Geradenpaar bestehend aus der Geraden $\mathfrak{P}$ und der Schnittgeraden der Ebene $\mathfrak{G}$ mit der Ebene des ersten Geradenpaares.

Konstruktion der einem Punkte von R_3^I zugeordneten Komplexgeraden. Ein Punkt X allgemeiner Lage des Raumes R_3^I bestimmt zusammen mit der Geraden $\mathfrak{P} = JJ'$ eine Ebene E*; in ihr liegen je eine Gerade der Bündel J und J', die X mit J und J' verbindet. Der Ebene E* entspricht in unserer Zuordnung eine Erzeugende $\mathfrak{E}^*$ der zweiten Erzeugendenschar der absoluten Fläche. Der Geraden XJ des Bündels J wird eine orientierte Fläche 2. Ordnung zugeordnet, die die Gerade $\mathfrak{G}$ (als Gerade der ersten Schicht) und die Gerade $\mathfrak{E}^*$ (als Gerade der zweiten Schicht) enthält. Ebenso wird der Geraden XJ' des Bündels J' eine orientierte Fläche 2. Ordnung zugeordnet, die die Gerade $\mathfrak{G}'$ (als Gerade der ersten Schicht) und die Gerade $\mathfrak{E}^*$ (als Gerade der zweiten Schicht) enthält. Diese beiden orientierten Flächen 2. Ordnung haben ein Blatt gemeinsam, dessen Gerade der zweiten Schicht die Erzeugende $\mathfrak{E}^*$ der absoluten Fläche ist. Die Gerade erster Schicht $\mathfrak{X}$ dieses Blattes ist diejenige Tangente der absoluten Fläche, die in unserer Punkt-Geradenverwandtschaft dem Punkte X von R_3^I zugeordnet ist.

Konstruktion der einem Punkte X des Raumes R_3^I zugeordneten Geraden des linearen Komplexes im Raume R_3^I: Durch einen Punkt Y allgemeiner Lage des Raumes R_3^{II}

[79] H. Beck, a. a. O. S. 55.

läuft je eine Gerade $\mathfrak{T}$ der Kongruenz $\mathfrak{G}$ und eine Gerade $\mathfrak{T}'$ der Kongruenz $\mathfrak{G}'$. Der Geraden $\mathfrak{T}$ der Kongruenz $\mathfrak{G}$ iſt im Raume R_3^I ein Ebenenpaar T_1, T_2; der Geraden $\mathfrak{T}'$ der Kongruenz $\mathfrak{G}'$ ein Ebenenpaar T'_1, T'_2 zugeordnet, wobei das Ebenenpaar T_1, T_2 (T_1', T_2') ſich mit der Ebene G (G') und der Verbindungsebene der Schnittgerade $T_1 T_2$ ($T_1' T_2'$) mit der Geraden $\mathfrak{P}$ in harmoniſcher Lage befindet. Hieraus kann gefolgert werden, daß die Schnittgeraden entſprechender Ebenen — die Bildgeraden des Punktes Y von R_3^{II} im linearen Komplex —:

$$\mathfrak{Y}_1 = T_1 T_1', \quad \mathfrak{Y}_2 = T_2 T_2' \text{ [80]})$$

zuſammen mit der Geraden $\mathfrak{P} = JJ'$ und $\mathfrak{Q} = GG'$ einem Regulus angehören und von den Geraden $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ harmoniſch getrennt werden.

---

[80] Die Geraden $\mathfrak{Y}_1' = T_1 T_2'$, $\mathfrak{Y}_2' = T_2 T_1'$ erfüllen den zu dem oben angegebenen in Bezug auf $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ harmoniſchen Komplex. Iſt für zwei zuſammengehörige Ebenenpaare die Art der Zuordnung beſtimmt, ſo auch für alle übrigen.

Lebenslauf.

Ich, Wilhelm Brach, wurde in Bonn am 14. 5. 1909 als Sohn des Architekten Gerhard Brach und ſeiner Ehefrau Barbara, geb. Radermacher, geboren. Von Oſtern 1918 an beſuchte ich das Städtiſche Gymnaſium und Realgymnaſium zu Bonn, das ich Oſtern 1927 mit dem Zeugnis der Reife verließ. Hierauf ſtudierte ich an den Univerſitäten Bonn (S.S. 1927 und W.S. 1927/28), Wien (S.S. 1928), Bonn (ſeit W.S. 1928/29) vornehmlich Mathematik, Phyſik, Angewandte Mathematik und Chemie. Am 18./19. Januar 1935 legte ich die wiſſenſchaftliche Prüfung für das höhere Lehramt ab.

Die mündliche Doktorprüfung fand am 24., 25. und 26. Juni ſtatt.

Allen meinen Lehrern bin ich zu großem Dank verpflichtet, insbeſondere Herrn Profeſſor E. A. Weiss, der mir zu vorliegender Arbeit die Anregung gab und mich während meines ganzen Bonner Studiums in kameradſchaftlicher Weiſe unterſtützte.